

Приложение к журналу

КВАНТ

№5/2004

И. Ф. Шарыгин

ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ

Бюро



Квантум

П Р И Л О Ж Е Н И Е
к журналу **КВАНТ** №5/2004

И.Ф.Шарыгин

ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ



Москва 2004
Бюро Квантум

УДК [512+514](078)
ББК 22.1я7
Ш58

Приложение
к журналу «Квант»
№5/2004

Ш58 Шарыгин И.Ф. **Избранные статьи.** – М.: Бюро Квантум,
2004. – 128 с. – (Прил. к журналу «Квант» №5/2004)
ISBN 5-85843-052-X

В книге собраны статьи известного педагога, геометра И.Ф.Шарыгина, в разные годы публиковавшиеся в журнале «Квант». Статьи посвящены различным аспектам школьной геометрии – как планиметрии, так и стереометрии.

Для старшеклассников, учителей, руководителей математических кружков и для всех любителей математики.



ББК 22.1я7

ISBN 5-85843-052-X

© Бюро Квантум,
«Квант», 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Об одном геометрическом месте точек	5
Числовые данные в геометрических задачах	12
Задачи о пересечении тел	20
Чертеж в стереометрических задачах	28
Выход в пространство	36
Алгебраический метод решения геометрических задач	43
Достраивание тетраэдра	50
Теоремы Чевы и Менелая	56
Вокруг биссектрисы	68
Узнайте точку	76
Арифметические текстовые задачи на конкурсном экзамене	85
Несколько эпизодов из жизни вписанных и описанных окруж- ностей	92
Чертежи в задачах по стереометрии	98
Откуда берутся задачи?	106
Ответы	126

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Для нормального развития ребенку необходимо полноценное питание. Для нормального интеллектуального развития необходима разнообразная интеллектуальная пища. Сегодня математика, особенно геометрия, является одним из немногих экологически чистых и полноценных продуктов, потребляемых в системе образования...» – так писал в одной из своих последних статей член редакционной коллегии журнала «Квант», выдающийся деятель математического просвещения Игорь Федорович Шарыгин. Его статьи, помещенные в этой книге, – яркий пример такого экологически чистого продукта мысли.

Игорь Федорович был замечательным «задачным композитором». Его задачи в течение нескольких десятилетий были истинным украшением самых крупных математических олимпиад. В статье «Откуда берутся задачи?» он приоткрывает тайну кухни, на которой изготавливаются такие изысканные блюда, как задачи Шарыгина.

«Геометрия – витамин для мозга», – говорил Игорь Федорович. С полным правом эти слова можно отнести и к его статьям «Вокруг биссектрисы», «Достраивание тетраэдра», «Узнайте точку» и другим. В каждой из них читатель обнаружит глубину и ясность мысли, четкость и строгость изложения.

Книга наверняка будет интересна и школьникам, и учителям, и вообще всем любителям математики. Ибо статьи Шарыгина – шедевры, открывающие красоту величественного здания Геометрии.

ОБ ОДНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МЕСТЕ ТОЧЕК

В «Кванте» №11 за 1972 год в «Задачнике «Кванта» была предложена задача **М174**. Вот ее условие.

На сторонах треугольника ABC , как на основаниях построены равнобедренные треугольники AB_1C , BA_1C и AC_1B (рис.1). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A , B и C соответственно на прямые B_1C_1 , C_1A_1 и A_1B_1 , пересекаются в одной точке.

В публикуемой статье рассказано об одном довольно общем методе решения задач такого типа, в частности, решается задача М174. В конце статьи приведены задачи для самостоятельного решения

Довольно часто встречаются задачи, в которых требуется доказать, что какие-то три или более прямых пересекаются в одной точке. Нередко эти задачи можно решать так: доказать, что две из рассматриваемых прямых пересекаются в точке, удовлетворяющей некоторому условию, которому удовлетворяют все точки третьей прямой и только они. В качестве примера можно привести следующие две теоремы из школьного учебника: биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке; перпендикуляры, восстановленные к серединам сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

Аналогично, если требуется доказать, что какие-то три или более точек лежат на одной прямой, то можно попытаться доказать, что все рассматриваемые точки удовлетворяют условию, которому удовлетворяют все точки некоторой прямой и

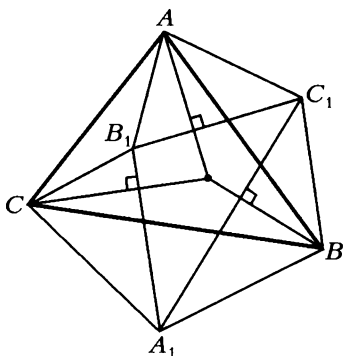


Рис. 1

только они (подобные рассуждения можно проводить не только для прямых, но и, например, для окружностей).

Об одном геометрическом месте точек, помогающем решать подобные задачи, мы сейчас и расскажем.

Формулировки утверждений

Утверждение 1. Пусть A_1 и A_2 – две фиксированные (различные) точки плоскости; k , k_1 и k_2 – действительные числа. Тогда геометрическим местом точек M таких, что

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k,$$

будет:

а) окружность, или одна точка, или пустое множество, если $k_1 + k_2 \neq 0$;

б) прямая линия, перпендикулярная отрезку A_1A_2 , если $k_1 + k_2 = 0$ (но $k_1 \neq 0$).

Справедливо и обобщение утверждения 1 для большего числа точек.

Утверждение 2. Пусть A_1, A_2, \dots, A_n – фиксированные точки плоскости, k_1, k_2, \dots, k_n (все $k_i \neq 0$) – данные числа. Тогда геометрическим местом точек M таких, что сумма

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + \dots + k_n(A_nM)^2$$

постоянна, будет

а) окружность, точка или пустое множество, если $k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$;

б) прямая или вся плоскость, если $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 0$.

С помощью утверждения 1б можно доказать следующее весьма полезное условие.

Утверждение 3. Для того чтобы перпендикуляры, опущенные из точек A_1 , B_1 и C_1 соответственно на стороны BC , AC и AB треугольника ABC , пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$(A_1B)^2 - (BC_1)^2 + (C_1A)^2 - (AB_1)^2 + (B_1C)^2 - (CA_1)^2 = 0. \quad (1)$$

Из последнего утверждения вытекает такое следствие.

Утверждение 4. Если перпендикуляры, опущенные из вершин A_1 , B_1 , C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ на стороны BC , AC и AB треугольника ABC , пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A , B и C на прямые B_1C_1 , A_1C_1 и A_1B_1 также пересекаются в одной точке.

Попробуйте самостоятельно доказать все эти утверждения. Мы же сначала покажем, как с помощью утверждения 3 или 4 решить задачу **М174**, а затем докажем сами утверждения.

Решение задачи М174

Согласно утверждению 3, нам надо проверить справедливость следующего равенства (см. рис.1):

$$(AB_1)^2 - (B_1C)^2 + (CA_1)^2 - (A_1B)^2 + (BC_1)^2 - (C_1A)^2 = 0.$$

Это равенство действительно выполняется, поскольку

$$AB_1 = B_1C, \quad CA_1 = A_1B, \quad BC_1 = C_1A.$$

Можно также воспользоваться утверждением 4. Тогда достаточно заметить, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны треугольника ABC , проходят через середины сторон треугольника ABC и потому пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника ABC .

Теперь перейдем к доказательству сформулированных выше утверждений.

Доказательства утверждений

Утверждение 1а. Пусть $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$. Возьмем на отрезке A_1A_2 точку D , делящую этот отрезок в отношении $k_2 : k_1$. Тогда $k_1(A_1D) = k_2(A_2D)$. Пусть $\angle MDA_1 = \varphi$ (рис.2). Запишем теорему косинусов для треугольников MDA_1 и MDA_2 :

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2 - 2MD \cdot DA_1 \cos \varphi,$$

$$(A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2 + 2MD \cdot DA_2 \cos \varphi.$$

Умножив первое равенство на k_1 , второе на k_2 и сложив их, получим:

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k_1(A_1D)^2 + k_2(A_2D)^2 + (k_1 + k_2)MD^2,$$

откуда

$$(MD)^2 = \frac{k_1(A_1D)^2 + k_2(A_2D)^2 - k_1(A_1M)^2 - k_2(A_2M)^2}{k_1 + k_2} = C.$$

В правой части последнего равенства мы получили постоянную величину и обозначили ее через C . Таким образом, $(MD)^2$ постоянно, т.е. точка M лежит на окружности с центром в точке D и радиусом \sqrt{C} , если $C >$

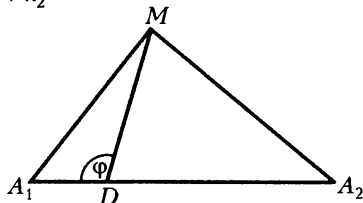


Рис.2

> 0 ; совпадает с точкой D , если $C = 0$; точек M , удовлетворяющих условию задачи, нет, если $C < 0$.

Легко проверить и обратное утверждение: каждая точка M полученного множества удовлетворяет соотношению $k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k$, для этого достаточно подставить в формулу (2) выражение для $(MD)^2$.

Мы рассмотрели случай $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Случай $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ сводится к рассмотренному заменой знаков k_1 , k_2 и k на противоположные, а в случае $k_1 > 0$, $k_2 < 0$ (или $k_1 < 0$, $k_2 > 0$) можно действовать так же, как в самом первом случае, только точка D будет лежать вне отрезка A_1A_2 (рис. 3; проведите самостоятельно все выкладки). Формула (2) останется в силе в

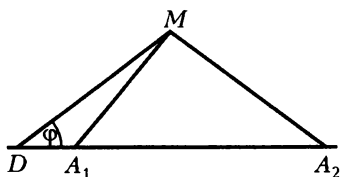


Рис.3

любом случае, в дальнейшем мы это используем.

Утверждение 16. Соотношение

$$k_1(A_1M)^2 - k_1(A_2M)^2 = k$$

эквивалентно соотношению

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

Пусть D – проекция точки M на прямую A_1A_2 . Тогда по теореме Пифагора (см. рис.4, 5)

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2, \quad (A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2,$$

откуда

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = (A_1D)^2 - (A_2D)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

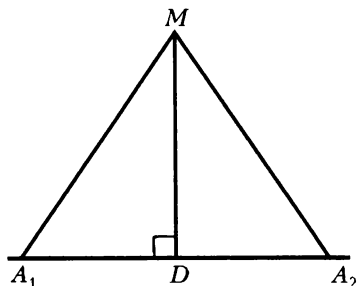


Рис.4

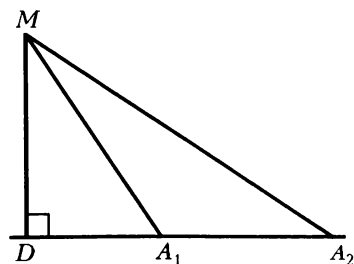


Рис.5

Итак, задача свелась к нахождению на прямой A_1A_2 точек D , удовлетворяющих последнему соотношению. Такую точку легко найти (проверьте), причем она единственна. Точка M должна лежать на перпендикуляре, восстановленном к прямой A_1A_2 в точке D .

Справедливо и обратное утверждение (докажите его самостоятельно): *для всех точек прямой, перпендикулярной отрезку A_1A_2 , разность квадратов расстояний до A_1 и A_2 постоянна.*

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Доказательство будем проводить по индукции. Для $n = 2$ мы уже доказали утверждение 2. (Для $n = 2$ геометрическим местом точек будет вся плоскость, если $k_1 + k_2 = 0$ и A_1 совпадает с A_2 . Тогда для всех точек плоскости $(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = 0$).

Пусть теперь утверждение 2 верно для некоторого n . Докажем, что оно верно и для $(n + 1)$. Заметим, что если $n \geq 2$, а все $k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1}$ не равны нулю, то среди них найдутся два, сумма которых не равна нулю. Пусть это будут k_1 и k_2 . Возьмем точку D , построенную в доказательстве утверждения 1а, и воспользуемся формулой (2). Тогда равенство

$$k_1 (A_1M)^2 + k_2 (A_2M)^2 + k_3 (A_3M)^2 + \dots + k_{n+1} (A_{n+1}M)^2 = k$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)(DM)^2 + k_3 (A_3M)^2 + \dots + k_{n+1} (A_{n+1}M)^2 = \\ = k - k_1 (A_1D)^2 - k_2 (A_2D)^2. \end{aligned}$$

Теперь справа стоит постоянная, а слева число точек уменьшилось на единицу, сумма же коэффициентов не изменилась. Согласно предположению индукции, для последнего равенства утверждение 2 выполняется. Значит, оно выполняется и для $(n + 1)$ точки. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Необходимость. Пусть P – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из A_1, B_1 и C_1 на BC, AC и AB . Из утверждения 1б следуют равенства

$$\begin{aligned} (A_1B)^2 - (CA_1)^2 &= (PB)^2 - (CP)^2, \\ (B_1C)^2 - (AB_1)^2 &= (PC)^2 - (AP)^2, \\ (C_1A)^2 - (BC_1)^2 &= (PA)^2 - (BP)^2. \end{aligned}$$

Сложив эти три равенства, получим, что в этом случае условие (1) выполняется.

Достаточность. Пусть выполнено условие (1) и пусть P – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из A_1 на BC и B_1 на CA . Из утверждения 16 следует, что

$$(A_1B)^2 - (CA_1)^2 + (B_1C)^2 - (AB_1)^2 = (PB)^2 - (AP)^2.$$

Но из условия (1) следует, что левая часть последнего равенства равна $(BC_1)^2 - (C_1A)^2$, т.е. $(BC_1)^2 - (C_1A)^2 = (PB)^2 - (AP)^2$, а это и означает, что точка P лежит на перпендикуляре, опущенном из C_1 на AB , что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Его справедливость следует из симметричности условия (1) относительно A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 .

Упражнения

1. Используя утверждение 3, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что все общие хорды любых двух из этих окружностей проходят через одну точку.

3. Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, A_2, \dots, A_n на прямые $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_nB_1$, пересекаются в одной точке, то

$$(B_1A_1)^2 - (A_1B_2)^2 + (B_2A_2)^2 - (A_2B_3)^2 + \dots + (B_nA_n)^2 - (A_nB_1)^2 = 0.$$

4. Возьмем три окружности, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон. Докажите, что перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в точках касания этих окружностей, пересекаются в одной точке.

5. Пусть расстояния от некоторой точки M до вершин A, B и C треугольника ABC выражаются числами a, b и c . Докажите, что ни при каком $d \neq 0$ ни для одной точки плоскости расстояния до вершин в том же порядке не могут выражаться числами

$$\sqrt{a^2 + d}, \quad \sqrt{b^2 + d}, \quad \sqrt{c^2 + d}.$$

6. Дан правильный треугольник ABC и произвольная точка D . A_1, B_1 и C_1 – центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, ACD и ABD . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин A, B и C на B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

7. Пусть A_1, A_2, A_3 и A_4 – произвольные точки плоскости. Докажите, что найдутся такие четыре числа x_1, x_2, x_3 и x_4 , не все равные нулю, что $x_1(A_1M)^2 + x_2(A_2M)^2 + x_3(A_3M)^2 + x_4(A_4M)^2$ постоянно для любой точки M этой плоскости.

8. Дан треугольник ABC . Рассмотрим всевозможные пары точек M_1 и M_2 таких, что $AM_1 : BM_1 : CM_1 = AM_2 : BM_2 : CM_2$. Докажите, что все прямые M_1M_2 проходят через фиксированную точку плоскости.

9. Окружность касается стороны AB треугольника ABC и продолжений сторон AC и CB соответственно в точках M и N . Другая окружность касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC соответственно в точках P и K . Докажите, что точка пересечения прямых MN и PK лежит на высоте треугольника ABC , проходящей через вершину A .

10. Даны два отрезка AB и CD . Найдите геометрическое место точек M таких, что сумма $S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CDM}$ постоянна.

11. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что середины диагоналей описанного четырехугольника и центр вписанного в него круга лежат на одной прямой (задача Ньютона).

12. Докажите, что геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости постоянно и отлично от единицы, является окружность (окружность Аполлония).

ЧИСЛОВЫЕ ДАННЫЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

В большинстве стандартных школьных задач числовые данные вообще не играют никакой роли. Как правило, такие задачи можно решить в общем виде, используя «буквенные» обозначения, а затем подставить в полученный ответ данные числа. Однако часто использование «специфики» числовых данных позволяет получить более простое решение. В этой заметке мы на примерах покажем, как по-разному влияют числовые данные на решение задачи.

Начнем с задачи, предлагавшейся на вступительных экзаменах на химический факультет МГУ в 1970 году.

Задача 1. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120° . Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB . При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC .

Заметим, что $\angle ODC = 90^\circ$. Действительно, продолжим отрезок CD до пересечения с окружностью (рис.1). Так как $AD \cdot BD = CD \cdot DE$, то $DE = CD = \sqrt{2}$ и $OD \perp CE$. Из $\triangle AOF$ мы находим радиус окружности. Он равен $\sqrt{3}$, поэтому из треугольника OFD получаем, что $\angle FDO = 60^\circ$. Отсюда $\angle CDA = 30^\circ$, $\angle CDB = 150^\circ$.

Воспользовавшись формулой для определения площади треугольника по двум сторонам и углу между ними, получим, что

$$S_{\triangle ADC} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad S_{\triangle CDB} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad \text{Отсюда } S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

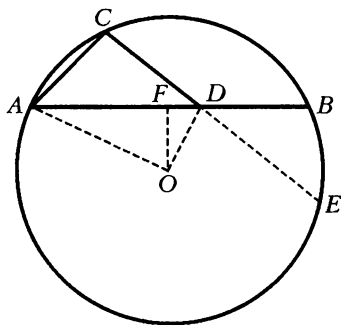


Рис. 1

Статья написана в соавторстве с С.В.Овчинниковым. Опубликовано в «Кванте» №11 за 1973 г.

Анализируя приведенное решение, мы видим, что числовые данные в задаче подобраны «весьма удачно». Если мы попытаемся решить эту задачу в общем виде, т.е. возьмем в качестве исходных данных произвольные числа, то очень быстро убедимся, что решение оказывается непомерно громоздким. (Попытайтесь все-таки решить эту задачу в общем виде. Это будет полезным упражнением.) А вот типичная задача, в которой числовые данные не играют никакой роли. Они используются лишь на последнем этапе при подстановке в общий ответ и носят иллюстративный характер.

Задача 2 (геофак МГУ, 1968). В треугольнике ABC проведены биссектриса AD угла BAC и биссектриса CF угла ACB (точка D лежит на стороне BC , точка F – на стороне AB). Найти отношение площадей треугольников ABC и AFD , если известно, что $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.

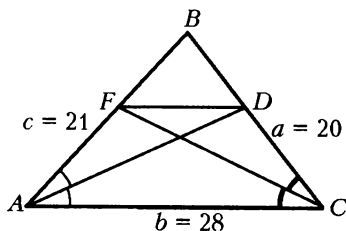


Рис.2

Обозначим стороны треугольника AB , BC и CA соответственно через c , a и b (рис.2). Используя свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, находим, что

$$AF = \frac{bc}{a+b}, \quad BD = \frac{ac}{b+c}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c}, \\ \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle ABD}} &= \frac{AF}{AB} = \frac{b}{(a+b)}, \\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AFD}} &= \frac{(a+b)(b+c)}{bc}. \end{aligned}$$

Подставляя вместо a , b и c их численные значения, находим $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AFD}} = 4$, а потому искомое отношение равно 4.

Следующая задача может быть решена в общем виде, но решение существенно упрощается, если вовремя воспользоваться численными значениями.

Задача 3 (мехмат МГУ, 1969). Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами,

прямоугольный. Это может привести к попытке решить задачу, используя метрические свойства прямоугольного треугольника.

На самом деле задача имеет простое геометрическое решение для произвольного треугольника ABC . Обозначим AB через c ,

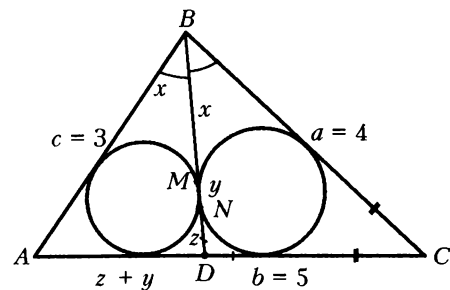


Рис.4

BC через a и AC через b (рис.4). По свойству биссектрисы $AD = \frac{bc}{a+c}$, $CD = \frac{ab}{a+c}$. Введем неизвестные $x = BM$, $y = MN$ и $z = ND$. Так как касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, то можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + \left(\frac{ab}{a+c} - z \right) = a, \\ x + \left(\frac{bc}{a+c} - z - y \right) = c. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$2y + \frac{ab}{a+c} - \frac{bc}{a+c} = a - c,$$

откуда

$$y = \frac{1}{2} \frac{(a-c)(a+c-b)}{a+c}.$$

Подставляя вместо a , b и c их значения, находим, что $MN = \frac{1}{7}$.

Теперь мы рассмотрим задачи, в которых специально подобранные числовые данные резко упрощают решение задачи.

Задача 5. В треугольнике ABC даны стороны $AB = 4$, $AC = \sqrt{17}$ и $BC = 5$. На стороне AB взята точка D такая, что

$AD = 1$. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников DBC и ADC .

Если мы догадаемся, что CD является высотой, то решение находится очень быстро: центры окружностей, описанных около треугольников ADC и DBC , лежат на серединах сторон AC и BC , и искомое расстояние равно длине средней линии, параллельной AB , т.е. 2 (рис.5). То, что CD является высотой, следует из равенства

$$BC^2 - AC^2 = BD^2 - DA^2 = 8.$$

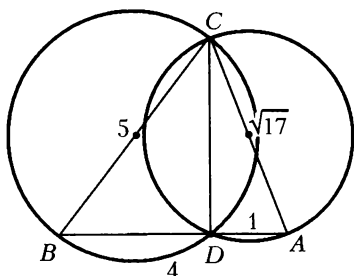


Рис.5

Как же догадаться, что CD является высотой? Ведь из решения видно, что эта догадка является основным моментом в решении – все остальные рассуждения тривиальны. Мы не собираемся (да и не можем)

объяснить, как надо догадываться, но на одно важное обстоятельство укажем. Речь идет о чертеже. Аккуратно и грамотно выполненный чертеж является очень хорошим помощником при решении задачи. Это относится к любой геометрической задаче, как с числовыми, так и с буквенными данными. Если данные – числовые, то на чертеже следует отразить заданные размеры фигуры. Например, если в разобранной задаче сделать чертеж с соблюдением заданных пропорций, то довольно легко увидеть, что CD – высота.

Задача 6 (геофак МГУ, 1970). В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 39$ см, $BC = 26$ см и боковые стороны $AB = 5$ см, $CD = 12$ см. Найти радиус окружности, которая проходит через точки A и B и касается стороны CD или ее продолжения.

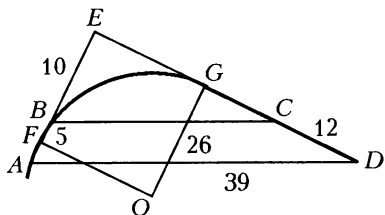


Рис.6

Достроим трапецию до треугольника AED (рис.6). Из подобия треугольников BEC и AED легко получаем $BE = 10$ см, $CE = 24$ см. Если чертеж выполнен аккуратно, то можно заметить, что $\angle AED = 90^\circ$. Это легко доказать: $AE^2 + ED^2 = AD^2$.

Пусть O – центр окружности, проходящей через A и B и касающейся ED в точке C . Опустим из O перпендикуляр OF на

AB , тогда F – середина хорды AB . Очевидно, $OG = EF = 12,5$ см. Отсюда искомый радиус равен 12,5 см.

В следующих задачах числовые данные проявляются весьма своеобразно. При предварительном изучении такой задачи трудно предугадать, как именно повлияют эти данные на решение, но стоит начать решать задачу, и в некоторый момент станет ясно, что только при этих данных можно получить ответ. Как правило, в подобных задачах путь решения очевиден, хотя с самого начала не ясно, приведет ли он к ответу.

Задача 7 (биофак МГУ, 1970). На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки: K на AB , L на BC , M на CD и N на AD . При этом $\frac{AK}{KB} = 2$, $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$, $\frac{CM}{MD} = 1$, $\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}$. Найти площадь шестиугольника $AKLCMN$.

Отношение площадей треугольников KBL и ABC равно $\frac{BK \cdot BL}{AB \cdot BC} = \frac{1}{12}$ (рис.7). Отношение площадей треугольников MND и ADC равно $\frac{DN \cdot DM}{AD \cdot CD} = \frac{1}{12}$.

Таким образом, сумма площадей треугольников KBL и MND равна $\frac{1}{12}$, откуда искомая площадь равна $\frac{11}{12}$.

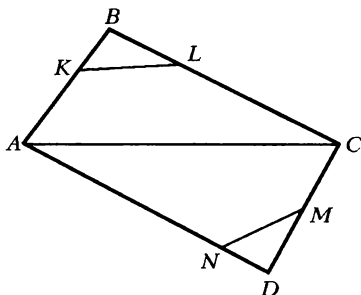


Рис.7

Ясно, что такая задача в общем виде вообще не имеет однозначного решения.

Задача 8 (мехмат УрГУ, 1968). Три пункта A , B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$. К отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC , а к отрезку дороги CA примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной CA , и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км² больше суммы площадей квадратных полей. Найти площадь леса.

На первый взгляд данных слишком мало для решения задачи. Однако перейдем к вычислениям. Обозначим стороны треуголь-

ника AB , BC и CA через c , a , b соответственно. Тогда из условий задали имеем: $4b = 20 + \frac{c^2}{4} + a^2$. Воспользуемся неравенством треугольника $b \leq a + c$ и подставим в него b , выраженное через a и c :

$$\frac{1}{4} \left(20 + \frac{c^2}{4} + a^2 \right) \leq a + c.$$

После простых преобразований этого неравенства получаем: $\left(\frac{c}{2} - 4 \right)^2 + (a - 2)^2 \leq 0$, откуда $c = 8$ (км), $a = 2$ (км), а $b = a + c = 10$ (км). Площадь леса равна 40 км^2 .

Избранный путь решения является единственно возможным в данной задаче. Но то, что он приводит к ответу, оказалось следствием специально подобранных данных. В результате этого подбора три точки A , B и C оказались лежащими на одной прямой и данных задачи хватило для получения ответа.

Упражнения

1 (мехмат МГУ, 1969). Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами 2. Одна из диагоналей четырехугольника равна $\sqrt{14}$. Найдите другую диагональ.

2. В остроугольном треугольнике ABC дано $AB = 15$, $BC = 10$ и угол BAC равен $\frac{7}{9}$. Вокруг треугольника ABC описана окружность и через точку D , лежащую на AC на расстоянии 9 от A , проведена хорда BE . Найдите площадь треугольника AEC .

3. Дан треугольник ABC со сторонами 5, 2 и $\sqrt{22}$, причем $AC = \sqrt{22}$. На AC взята точка D такая, что $BD = 3$. Найдите расстояние между точкой D и центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC .

4 (физфак МГУ, 1971). В правильную треугольную пирамиду $SABC$, все ребра которой равны a , вписана сфера. На ребре SA взята точка M так, что $AM = MS$, а на ребре BC взята точка N так, что $2CN = NB$. Прямая MN пересекает сферу в двух точках P и Q . Найдите длину отрезка PQ .

5 (химфак МГУ, 1971). В треугольнике ABC со сторонами $AB = \sqrt{3}$ см, $BC = 4$ см, $AC = \sqrt{7}$ см проведена медиана BD . Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC , касаются BD в точках M и N соответственно. Определите длину отрезка MN .

6 (геофак МГУ, 1971). Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности

радиуса R в точках A и B соответственно. Определите радиус r , если $AB = 12$ см, $R = 8$ см.

7 (биофак МГУ, 1971). Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем для хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найдите длины хорд BD и CD .

8 (биофак МГУ, 1970). Дан треугольник ABC , площадь которого равна единице. На медианах AK , BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P , Q и R так, что

$$\frac{AP}{PL} = 1, \quad \frac{BQ}{QL} = \frac{1}{2}, \quad \frac{CR}{RN} = \frac{5}{4}.$$

Найдите площадь треугольника PQR .

9 (экономич. ф-т МГУ, 1970). Объем бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равен 150 см^3 , площадь полной поверхности равна 280 см^2 , периметр основания равен 40 см. Найдите размеры бруска.

10 (экономич. ф-т МГУ, 1971). В двугранный угол 60° вписан шар радиуса R . Найдите радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол 45° .

11. Дан треугольник со сторонами $AB = 4$, $BC = 3$ и $AC = 5$. На стороне AB взята точка D так, что $DB = \frac{7}{8}$. Через точки C , D и B проведена окружность, пересекающая AC в точке E . Найдите длину отрезка BE .

ЗАДАЧИ О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ТЕЛ

В этой статье разбираются решения нескольких довольно трудных и, на наш взгляд, полезных задач на вычисление объемов пересечений тел. Основная трудность подобных задач заключается в том, что при их решении требуется хорошо развитое пространственное воображение. В частности, при решении любой задачи о пересечении тел очень важно суметь сделать хороший чертеж. Нередко именно от чертежа зависит успех в решении задачи. Прежде чем перейти к разбору задач, дадим вам следующий совет: прочтя условие той или иной задачи, не смотрите сразу же ее решение, подумайте некоторое время, попытайтесь сделать чертеж и решить задачу самостоятельно. Тогда вы получите и удовлетворение, и возможность сравнить свое решение с предлагаемым в статье (вполне возможно, что вам удастся придумать решение, отличное от приводимого в статье). Если ваши усилия не увенчаются успехом, то все равно время, потраченное на раздумья, пойдет на пользу и облегчит чтение статьи.

Задача 1. *В кубе с ребром a помещены три правильные четырехугольные призмы, вершины каждой из которых являются серединами ребер двух противоположных граней куба. Найти объем части куба, принадлежащей всем этим трем призмам.*

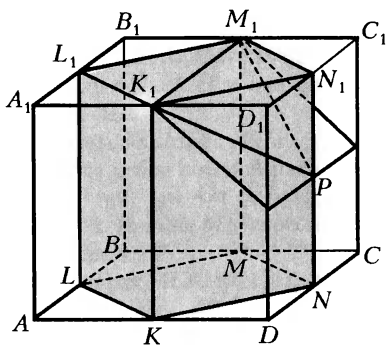


Рис. 1

Поскольку довольно трудно представить себе, а тем более сразу изобразить искомое тело, поступим следующим образом. Поместим сначала в куб одну призму (рис.1), затем посмотрим,

что «отсечет» от нее вторая, и, наконец, что останется, когда мы добавим третью призму.

Пусть вершинами второй призмы являются середины ребер AA_1 , A_1D_1 , D_1D , AD , BB_1 , B_1C_1 , C_1C и CB (основания этой призмы лежат в «передней» и «задней» гранях куба). Ребро второй призмы, соединяющее середины ребер DD_1 и CC_1 куба, пересекает отрезок NN_1 в его середине. Значит, грань второй призмы, проходящая через точки K_1M_1 и середины ребер DD_1 и CC_1 , пересекается с гранью KK_1N_1N по прямой K_1P , а вся эта грань второй призмы отсекает от первой пирамиду $K_1M_1PN_1$.

Проведя аналогичные рассуждения для остальных граней второй призмы, мы можем изобразить общую часть первых двух призм (рис.2). Она представляет собой две четырехугольные пирамиды: KK_1M_1MP и KK_1M_1MQ (P и Q – центры граней DCC_1D_1 и ABB_1A_1), сумма объемов которых равна $\frac{a^3}{3}$, так как $S_{KK_1M_1M} = a^2$ и $PQ = a$.

Теперь посмотрим, что «отрежет» от этого тела третья призма, основания которой лежат в гранях ABB_1A_1 и DCC_1D_1 . Боковые грани этой

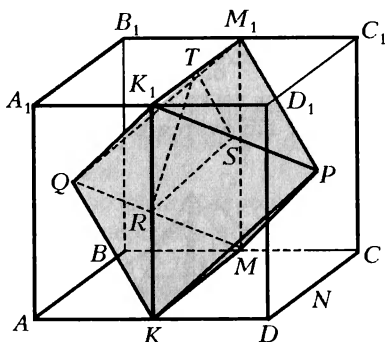


Рис.2

призмы «срежут» четыре вершины: K_1 , M_1 , K и M . На рисунке 3 изображена пирамида KK_1M_1MP со «срезанными» третьей призмой углами. «Отрезанные» углы являются равными треугольными пирамидами. (Одна из них – $RTSK_1$, где R , T и S – середины KK_1 , K_1M_1 и PK_1 .) Объем каждой из них составляет $1/16$ часть объема пирамиды KK_1M_1MP (это легко проверяется; например, объем пирамиды $RTSK_1$ в восемь раз меньше объема пирамиды KM_1PK_1 который вдвое меньше объема пирамиды PKK_1M_1M ; подробные вычисления и доказательства проведите самостоятельно).

Таким образом, от пирамид отсекается $4 \times 1/16 = 1/4$ часть. Объем общей

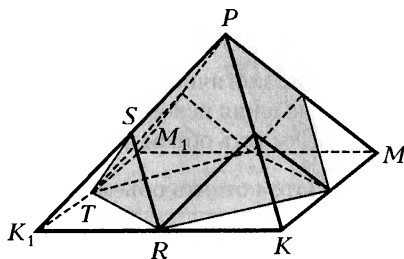


Рис.3

части всех трех призм составляет $3/4$ объема общей части первой и второй призм, равного $\frac{a^3}{3}$, т.е. он равен $\frac{a^3}{4}$.

Задача 2. Даны две равные правильные треугольные пирамиды объема V каждая, расположенные симметрично относительно точки O . Найти объем общей части этих двух пирамид, если точка O лежит на высоте одной из них и делит эту высоту в отношении $2:1$, считая от вершины пирамиды.

В этой задаче чрезвычайно важно, хотя и достаточно трудно, сделать правильный, хороший, обоснованный чертеж. Пусть $SABC$ – первая пирамида. Основание $A_1B_1C_1$ второй пирамиды пересекает высоту SH_1 в точке H , делящей ее в отношении $1:2$ (считая от вершины S), а в пересечении с пирамидой $SABC$ дает треугольник MNP , подобный треугольнику ABC , $MN = \frac{1}{3}AB$.

Отсюда легко вывести (проверьте!), что треугольник MNP целиком находится внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично, внутри основания ABC будет находиться треугольник $M_1N_1P_1$ являющийся сечением второй пирамиды плоскостью треугольника ABC .

Теперь можно изобразить тело, являющееся общей частью рассматриваемых двух пирамид (рис.4), причем положение, например, точки L находится так: надо соединить точку S с серединой ребра BC , пересечение этой прямой с прямой S_1A_1 даст точку L (для доказательства рассмотрите сечение пирамид плоскостью

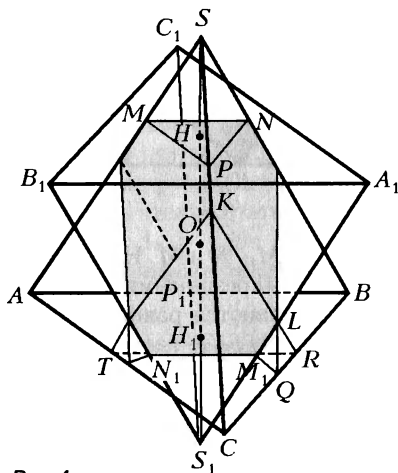


Рис.4

SA_1S_1). Аналогично находятся остальные точки на рисунке 4. Для вычисления искомого объема мы должны от объема пирамиды $SABC$ отнять объем пирамиды $SMNP$ (этот объем составляет $\frac{1}{27}V$), затем отнять объемы трех одинаковых пирамид, равных $KTRC$, и прибавить объемы трех «маленьких» пирамид, равных QM_1RL .

Найдем объем пирамиды $KTRC$. Так как плоскость KRT параллельна плоскости SAB , то $V_{KTRC} = \left(\frac{TR}{AB}\right)^3 V$. Аналогично, $V_{QM_1RL} = \left(\frac{M_1R}{AB}\right)^3 V$. Но $M_1R = \frac{TR - M_1N_1}{2} = \frac{3TR - AB}{6}$. Нам осталось найти $\frac{TR}{AB}$. Треугольники ABC и $M_1N_1P_1$ правильные, имеют соответственно параллельные стороны, их центры совпадают, и $M_1N_1 = \frac{AB}{3}$. Отсюда легко найти, что $\frac{TR}{AB} = \frac{5}{9}$, $\frac{M_1R}{AB} = \frac{1}{9}$ (проверьте!). Искомый объем равен

$$V - \frac{1}{27}V - 3 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 V + 3 \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot V = \frac{110}{243} V.$$

Задача 3. Дан куб с ребром a . Второй куб получается из данного поворотом вокруг его диагонали на угол α ($\alpha \leq 60^\circ$). Найти объем общей части этих кубов.

В этой задаче представить себе и изобразить пересечение тел в целом трудно, легче понять, как пересекаются отдельные элементы одного тела с элементами другого тела.

Обозначим вершины данного куба буквами $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ (рис.5), и пусть куб поворачивается вокруг диагонали B_1D против хода часовой стрелки. Посмотрим, какие куски исходного куба могут срезаться при его повороте. Вершины куба расположены дальше всего от центра куба O — середины диагонали B_1D , которая остается на месте. Поэтому уйти при повороте внутрь куба вершины не могут, наоборот, они окажутся вне куба и срезаться будут куски куба около вершин. Далее, срезать куски куба могут только грани. Поэтому достаточно найти, какой кусок куба срезает каждая грань.

Найдем, что срезет грань DCC_1D_1 . Подскажем сразу ответ: срезается пирамида D_1LPD (см. рис.5), где $D_1L = D_1K = C_1P$, причем основания перпендикуляров, опущенных из точек L и K на B_1D , совпадают (докажите!) в точке, которая на

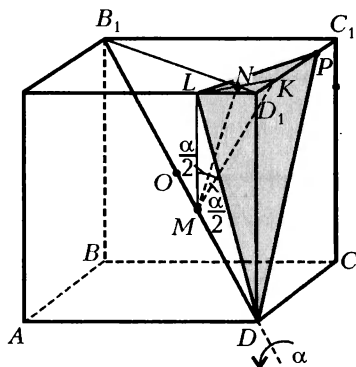


Рис.5

рисунке 5 обозначена буквой M , и $\angle LMK = \alpha$. Таким образом, при повороте куба точка K переходит в точку L . Обозначим LD_1 через x (его мы найдем позднее). Пусть Q – точка на ребре CC_1 , $C_1Q = C_1P = x$. Тогда при повороте куба точка Q переходит в точку P (докажите!). Итак, грань DCC_1D_1 пересекает куб по

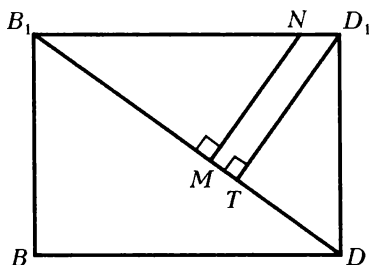


Рис.6

треугольнику LPD и отсекает пирамиду D_1LPD объема $\frac{1}{6}ax(a-x)$ (докажите!). Аналогично рассматриваются остальные грани – они отсекают такие же пирамиды. Поэтому объем общей части кубов будет $a^3 - ax(a-x)$. Осталось найти x .

Пусть N – точка пересечения B_1D_1 и LK . Изобразим на отдельном чертеже (рис.6) прямоугольник BDD_1B_1 . Пусть T – основание перпендикуляра, опущенного из D_1 на B_1D . Имеем:

$LN = ND_1 = \frac{LK}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ (см. рис.5). Из $\triangle LMK$ получим:

$$MN = LN \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$B_1N = B_1D_1 - ND_1 = a\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Легко из $\triangle B_1D_1D$ найти D_1T : $D_1T = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Из подобия треугольников B_1NM и B_1D_1T получим:

$$\frac{B_1N}{B_1D_1} = \frac{NM}{D_1T},$$

$$\frac{a\sqrt{2} - x\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{x\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}},$$

откуда

$$x = \frac{2a}{1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}},$$

искомый объем равен

$$V = a^3 - \frac{2a^2}{1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \left(a - \frac{2a}{1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{3a^3}{2(1 + \cos(\alpha - 60^\circ))}.$$

Задача 4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Середины двух его противоположных ребер AB и $C_1 D_1$ служат серединами двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, причем на одном из этих ребер лежит соответствующее ребро куба. Найти объем общей части куба и тетраэдра.

Пусть точка K – середина AB – является серединой ребра PQ правильного тетраэдра, а M – середина $D_1 C_1$ и одновременно середина ребра RS тетраэдра ($D_1 C_1$ лежит на RS (рис.7)).

Если ребро тетраэдра равно b , то расстояние между серединами его скрещивающихся ребер легко вычисляется, оно равно $b \frac{\sqrt{2}}{2}$ (проверьте!). С другой стороны $MK = a\sqrt{2}$. Значит, $b = 2a$.

Мы знаем длину ребра тетраэдра, однако не так просто изобразить пересечение данных тел – неясно, будут ли ребра тетраэдра пересекать куб. Чтобы ответить на этот вопрос, спроектируем данные тела на плоскость $ABCD$ (рис.8). Поскольку PQ составляет с этой плоскостью угол 45° (докажите!), то длина проекции PQ на эту плоскость будет

$$b \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

Пусть L – точка пересечения проекций прямых AB и PR . Из подобия треугольников PLK и PMR легко

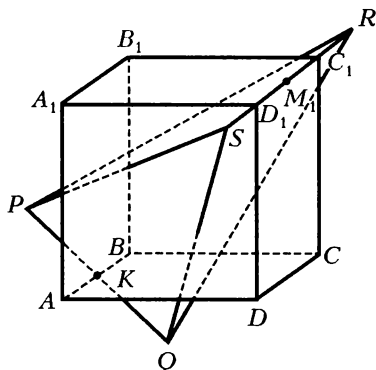


Рис.7

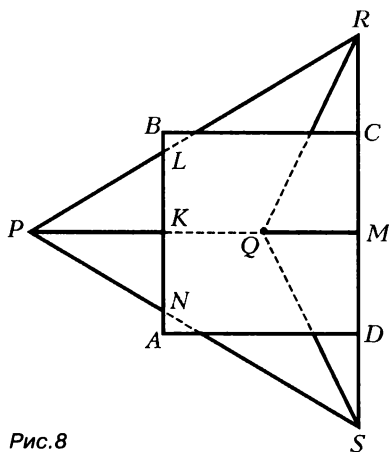


Рис.8

найдем:

$$LK = \frac{RM \cdot PK}{PM} = a \frac{1}{1 + \sqrt{2}} < \frac{a}{2}.$$

Значит, ребро PR тетраэдра (а следовательно, и другие ребра: PS , QR и QS) пересекает куб.

Для вычисления объема удобно изобразить заданное тело как тетраэдр со срезанными углами. Чтобы определить, какую часть объема тетраэдра составляет каждая из срезанных пирамид, удобно воспользоваться следующим утверждением (докажите его самостоятельно), которое оказывается полезным довольно часто.

Даны две пирамиды $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ причем A_1 лежит на SA , B_1 на SB , C_1 на SC . Тогда отношение объемов этих пирамид равно отношению произведений длин ребер, выходящих из вершины S , а именно

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1}{SA \cdot SB \cdot SC}.$$

Теперь легко можно найти объемы пирамид, «отрезанных» от вершин P и Q . Каждый из них составляет

$$\frac{PK}{PQ} \cdot \frac{PL}{PR} \cdot \frac{PN}{PS} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2(3 + 2\sqrt{2})}$$

часть объема тетраэдра, а объемы пирамид, «отрезанных» от вершин R и S , составляют $1/16$ объема тетраэдра (проверьте!).

Объем тетраэдра равен $\frac{b^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. Значит, объем общей части куба и тетраэдра будет равен

$$\frac{2a^3\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} - \frac{1}{8} \right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} (16\sqrt{2} - 17).$$

Упражнения

1. Даны две равные правильные треугольные пирамиды, симметричные относительно точки O , расположенной на высоте одной из этих пирамид. Найдите объем общей части этих двух пирамид, если точка O делит эту высоту, считая от вершины пирамиды, в отношении: а) $3 : 1$; б) $1 : 1$; в) $4 : 1$.

2. Дан правильный тетраэдр объема V . Вторым тетраэдром получается из данного поворотом его на угол α вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер тетраэдра. Найдите объем общей части этих двух тетраэдров.

3. Треугольная пирамида $PQMN$ и куб $ABCD_1B_1C_1D_1$ расположены следующим образом: середина ребра PQ совпадает с серединой ребра AB и $PQ = 2AB$, ребро D_1C_1 лежит на ребре MN , их середины совпадают, $MN = 3D_1C_1$. Какая часть объема пирамиды расположена внутри куба, если известно, что PQ перпендикулярно плоскости ABD_1C_1 ?

4. Ребро одного правильного тетраэдра служит апофемой другого тетраэдра. Апофема противоположной данному ребру грани первого тетраэдра лежит на ребре второго. Какая часть объема первого тетраэдра расположена внутри второго?

5. Центры куба и правильного тетраэдра совпадают, два ребра тетраэдра параллельны диагоналям одной из граней куба. Найдите объем части тетраэдра, находящейся внутри куба, если ребро куба равно a , ребро тетраэдра равно $\frac{3a}{2}\sqrt{2}$.

6. Внутри правильной треугольной пирамиды находится вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а биссектрисы плоских углов проходят через вершины основания пирамиды. В каком отношении поверхность трехгранного угла делит объем пирамиды, если известно, что боковая поверхность пирамиды разделена на две равные по площади части?

7. Диагональ единичного куба лежит на ребре двугранного угла в 60° . Докажите, что объем части куба, находящейся внутри двугранного угла, имеет постоянную величину, и найдите этот объем.

8 (МГУ, физфак, 1963). Ребро куба равно a . Сфера с центром O пересекает три ребра, сходящиеся в вершине A , в их серединах. Из точки B пересечения сферы с одним из ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину A , причем угол между этим перпендикуляром и радиусом OB делится ребром куба пополам. Найдите радиус сферы.

9 (МГУ, физфак, 1968). В правильной треугольной пирамиде высота равна h , сторона основания равна a . Одна из вершин основания является центром сферы, касающейся противоположной грани пирамиды. Найдите площадь тех частей боковых граней пирамиды, которые расположены внутри сферы.

10 (МФТИ, 1968). В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD взаимно перпендикулярны и равны a и b соответственно. Общий перпендикуляр к этим ребрам пересекает ребро AB в точке M и ребро CD в точке N ; $MN = c$. В тетраэдр вписан куб так, что четыре ребра куба параллельны MN и на каждой грани тетраэдра лежат в точности две вершины куба. Найдите ребро куба.

ЧЕРТЕЖ В СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

При проверке письменных работ поступающих в высшие учебные заведения часто обнаруживается следующее: в чистовике геометрическая задача сопровождается достаточно хорошим чертежом, а то, что изображено в черновике, чертежом можно назвать лишь условно. И приходится только удивляться, как с помощью такого «чертежа» абитуриенты умудрились все-таки решить задачу. Ведь не секрет, что хороший чертеж может оказать существенную помощь в решении геометрических задач, особенно задач по стереометрии. Конечно, научиться делать такие чертежи, какие делают художники «Кванта», вряд ли возможно для рядового школьника. Однако если при решении каждой геометрической задачи обращать внимание на качество чертежа, то в конце концов вы научитесь делать его вполне прилично. Возьмите себе за правило не приступать к решению задачи до тех пор, пока вы не сделаете хорошего чертежа. Не жалейте бумаги, делайте свой чертеж крупным, невидимые линии изображайте пунктиром, не проводите вспомогательных линий, пока не убедитесь в их необходимости. Очень часто стереометрические задачи сводятся к одной или нескольким задачам по планиметрии. Сделайте для каждой такой задачи отдельный чертеж. Шары, как правило, изображать не следует; достаточно бывает указать их центр, точки касания с прямой, плоскостью или другими шарами. Факт касания двух шаров означает, что расстояние между их центрами равно сумме радиусов, если касание внешнее, и это же расстояние равно разности радиусов, если касание внутреннее.

Перейдем к примерам.

Задача 1 (МГУ, химический факультет, 1968 г.). *Внутри сферы расположены четыре шара радиуса r . Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы. Определить радиус сферы.*

Решение. Пусть A, B, C и D – центры шаров радиуса r , а O – центр сферы (рис.1). Из того, что шары касаются попарно друг друга внешним образом, следует, что $ABCD$ – правильный тетраэдр с ребром $2r$. Все шары касаются внутренним образом сферы с центром O , поэтому расстояния AO, BO, CO, DO равны между собой и равны $R - r$, где R – искомый радиус сферы. С другой стороны, все эти расстояния равны радиусу шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром $2r$. Теперь уже легко найти искомый радиус R . Сделайте это сами.

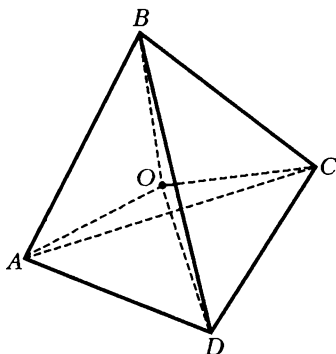


Рис. 1

Ответ: $R = r \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$.

Задача 2 (МФТИ, 1966 г.). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . На ребре AB как на диаметре построена сфера. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающегося построенной сферы.

Решение. Пусть O – середина AB – центр данной сферы, O_1 – центр искомого шара. Легко сообразить, что O_1 лежит на высоте AM тетраэдра $ABCD$ (рис.2).

Обозначим через x радиус шара с центром в точке O_1 . Из того, что этот шар вписан в трехгранный угол A , следует, что $AO_1 = 3x$. В самом деле, для любого шара, вписанного в трехгранный угол A , отношение расстояния от его центра до вершины A к радиусу есть величина постоянная. Рассмотрим шар, вписанный в правильный тетраэдр $ABCD$; центр его, как известно, совпадает с центром описанного шара; отношение же радиусов описанного и вписанного шаров для правильного тетраэдра легко вычисляется и равно 3.

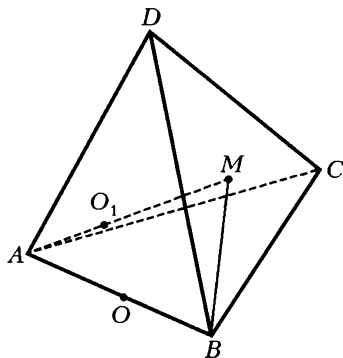


Рис. 2

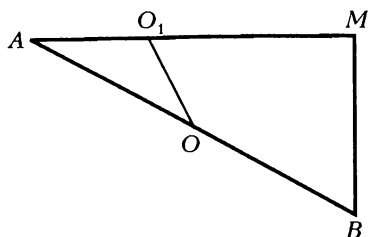


Рис.3

Изобразим $\triangle AMB$ на отдельном чертеже ($\angle M$ – прямой рис.3). Рассмотрим $\triangle AOO_1$.

Имеем

$$AO_1 = 3x, \quad AO = \frac{a}{2},$$

$$O_1O = \frac{a}{2} \pm x.$$

Знак «+» соответствует случаю внешнего касания шаров с центрами в точках O и O_1 , знак «-» – случаю касания внутреннего. (На рисунке 3 изображен случай внутреннего касания. В случае внешнего касания точка O_1 должна находиться на продолжении AM за точку M .)

Из прямоугольного треугольника AMB находим $\cos \angle O_1AO$, а затем, написав теорему косинусов для $\triangle AOO_1$, находим x .

Ответ: $\frac{a}{8}(\sqrt{6} \pm 1)$.

Задача 3 (МГУ, химический факультет, 1971 г.). Три одинаковых прямых круговых конуса, радиусы оснований которых равны r и составляют $3/4$ их высоты, расположены по одну сторону от плоскости P , а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждого двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P , так и всех трех конусов.

Для решения задачи нам понадобятся следующие две леммы (докажите их самостоятельно):

Лемма 1. Если шар внешним образом касается поверхности конуса и плоскости, в которой лежит основание конуса, то ось конуса, образующая конуса, на которой расположена

точка касания конуса с шаром, центр шара и точка касания шара с плоскостью, в которой лежит основание конуса, находятся в плоскости, перпендикулярной к плоскости основания конуса. (На рисунке 4 SO_1 – ось конуса, SB – его образующая, O – центр шара, A – точка касания шара с плоскостью, в которой лежит основание конуса, C – точка касания шара с конусом.)

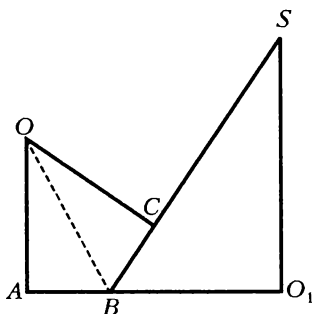


Рис.4

Лемма 2. Точка касания шара с плоскостью P находится в центре правильного треугольника, образованного центрами окружностей оснований конусов (шар, конусы и плоскость P – из условия задачи).

Теперь рисунок 4 поможет нам решить задачу. Имеем

$$AO_1 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}, \quad BO_1 = r, \quad SO_1 = \frac{4}{3}r.$$

Искомый радиус OA легко найти из прямоугольного треугольника AOB , в котором известен катет AB и $\angle OBA = \frac{1}{2}(\angle ABS)$, а все тригонометрические функции $\angle ABS$ легко вычисляются.

Ответ: $2r \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$.

Задача 4 (МГУ, физический факультет, 1972 г.). На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиусом 1, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

Перечислим следующие факты, на которые мы будем опираться при решении задачи; вам следует доказать их самостоятельно:

1) если две окружности, расположенные на сфере, касаются друг друга, то центр сферы, центры этих окружностей и точка касания расположены в одной плоскости;

2) центры O_1, O_2, O_3 данных окружностей радиуса 1 образуют правильный треугольник;

3) центр искомой окружности находится на радиусе сферы, перпендикулярном плоскости $O_1O_2O_3$.

Для решения задачи нам понадобятся рисунки 5 и 6.

На рисунке 5 O – центр сферы, O_1 и O_2 – центры двух окружностей радиусов 1, A – точка их касания, $\angle AO_1O = \angle AO_2O = 90^\circ$, $OA = 2$.

Теперь легко найдем

$$OO_1 = OO_2 = O_1O_2 = \sqrt{3}.$$

На рисунке 6 M – центр правильного $\triangle O_1O_2O_3$ со стороной $\sqrt{3}$ и, значит, $O_1M = 1$, O_4 – центр искомой окружности, B – точка ее

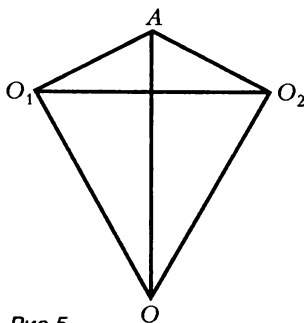


Рис.5

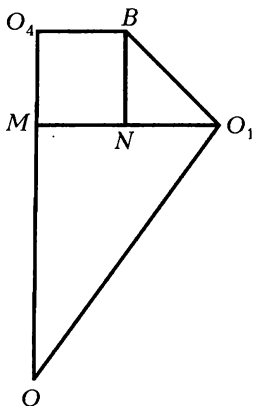


Рис.6

касания с первой окружностью, $BN \perp MO_1$. Отрезок NO_1 легко найти из подобия $\triangle O_1BN$ и $\triangle O_1MO$, а искомый радиус $O_4B = MN = MO_1 - NO_1$.

Ответ: $1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Иногда бывает полезно рассмотреть какое-нибудь геометрическое тело – пирамиду, параллелепипед, призму и т.д., не фигурирующее в условии задачи.

Задача 5 (формулировка этой задачи является перефразировкой задачи, дававшейся в 1973 году на олимпиаде в МФТИ). *Оси трех равных попарно касающихся цилиндрических поверхностей взаимно перпендикулярны. Найти радиус наименьшего шара, касающегося всех трех поверхностей, если радиус каждой из них равен r .*

Решение. Рассмотрим куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $2r$. Мы можем считать, что ребро AA_1 лежит на оси одного цилиндра, ребро DC – на оси другого и, наконец, ребро $B_1 C_1$ – на оси третьего (рис.7).

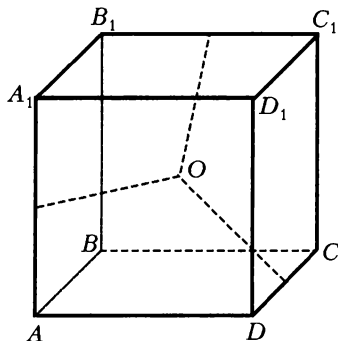


Рис.7

Докажем, что центр искомого шара совпадает с центром O куба.

В самом деле, рассмотрим три цилиндра, концентрических данным и проходящих через точку O . Тогда O – единственная точка, лежащая внутри или на поверхности всех этих трех цилиндров, и, значит, для любой точки, отличной от O , расстояние до

одной из трех прямых AA_1 , DC и $B_1 C_1$ больше, чем расстояния от O до этих прямых.

Ответ: $r(\sqrt{2} - 1)$.

Задача 6. n равных конусов ($n \geq 3$) имеют общую вершину, каждый касается двух других, а все касаются одной плоскости. Найти угол при вершине осевого сечения этих конусов.

Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$ (рис.8), у которой в основании лежит равнобедренный $\triangle ABC$ ($AC = CB$)

с углом ACB , равным $\frac{2\pi}{n}$, SC перпендикулярна плоскости ABC и проекция C на плоскость SAB совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABS . Рассмотрим теперь конус, вершина которого находится в точке C , а окружностью основания является окружность, вписанная в $\triangle SAB$. Легко убедиться, что этот конус можно рассматривать в качестве искомого. В самом деле, если поставить рядом друг с другом n пирамид, равных пирамиде $SABC$, так, чтобы у них совпадали вершины S , то конусы, вписанные в эти пирамиды, будут образовывать систему, удовлетворяющую условиям задачи.

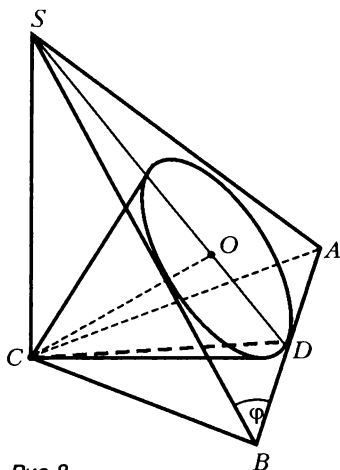


Рис.8

Обозначим через l образующую конуса, а через r – радиус окружности его основания. Из подобия прямоугольных треугольников SCD и OCD найдем $SD = \frac{l^2}{r}$, из $\triangle CDB$ – $DB = l \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$. С другой стороны, из $\triangle SDB$ находим

$$SD = DB \operatorname{tg} \varphi = DB \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}},$$

где φ – угол SBD , т.е.

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{OD}{DB} = \frac{r}{l \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}.$$

Синус половины искомого угла равен отношению r/l , которое легко определяется из получившегося уравнения:

$$\frac{l^2}{r} = l \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \frac{2 \frac{r}{l} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{1 - \frac{r^2}{l^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

$$\text{Ответ: } 2 \arcsin \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

Задача 7. На плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?

Пусть A – некоторая точка на луче, B – точка падения луча на зеркало, A_1 – точка, симметричная A относительно данного

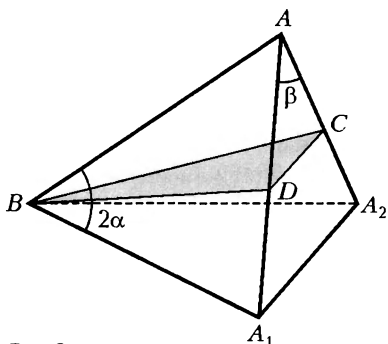


Рис.9

зеркала, а A_2 – точка, симметричная A относительно повернутого зеркала, D и C – проекции точки A на эти зеркала (рис.9). Тогда BA_1 и BA_2 суть продолжения отраженных лучей и, следовательно, искомый угол равен $\angle A_1BA_2$.

В тетраэдре AA_1A_2B (см. рис.9) D и C – середины ребер AA_1 и AA_2 соответственно; плоскость BDC (плоскость повернутого зеркала) перпендикулярна ребру AA_2 , $AB = A_1B = A_2B$, $\angle ABA_1 = 2\alpha$, $\angle A_1AA_2 = \beta$. Отсюда легко находим:

$$A_1A_2 = 2DC = 2AD \sin \beta = 2AB \sin \alpha \sin \beta.$$

Теперь из $\triangle A_1BA_2$ находим нужный угол.

Ответ: $2 \arcsin (\sin \alpha \sin \beta)$.

Переходя к самостоятельному решению задач, список которых приводится в конце этой заметки, просмотрите внимательно еще раз решения задач 1–7. На первый взгляд кажется, что во всех этих задачах необходим весьма сложный чертеж. Однако мы сумели обойтись простыми, в некоторых случаях даже чисто планиметрическими чертежами. Чтобы проиллюстрировать достаточно трудную стереометрическую задачу простым чертежом, необходимо обладать хорошо развитым пространственным воображением. Достигается это практикой и только практикой.

Упражнения

1 (МГУ, физфак, 1963 г.). В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой

поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности и остальных четырех шаров. Определите объем конуса, если радиус каждого шара равен R .

2 (МГУ, химфак, 1968 г.). Три шара радиуса r лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причем каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Определите высоту призмы.

3 (МФТИ, 1966 г.). В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна стороне основания. Внутри пирамиды расположены два шара: шар радиуса r касается всех боковых граней; шар радиуса $2r$ касается основания и двух смежных боковых граней; оба шара касаются друг друга внешним образом. Найдите апофему этой пирамиды.

4 (МФТИ, 1973 г.). Два равных шара касаются друг друга и граней двугранного угла 2α . Пусть A – точка касания одного шара с одной гранью угла, а B – точка касания другого шара с другой гранью угла. В каком отношении отрезок AB делится сферами?

5 (МГУ, мехмат, 1968 г.). Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S – вершина) со стороной основания a и боковым ребром a . Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается ребер SB и SD в их серединах. Найдите объем пирамиды $OSCD$.

6 (МГУ, химфак, 1971 г.). Правильный треугольник со стороной a лежит в плоскости P . Средними линиями он разделен на четыре треугольника, и на трех из них, примыкающих к вершинам, построены, как на основаниях три правильные треугольные пирамиды высотой a . (Все три – по одну сторону от плоскости P .) Найдите радиус шара, лежащего между пирамидами и касающегося как плоскости P , так и всех трех пирамид.

7 (МГУ, ВМК, 1972 г.). Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45° . Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

8. Оси трех равных попарно касающихся цилиндрических поверхностей взаимно перпендикулярны. Найдите радиус наибольшей цилиндрической поверхности, которая может пройти между данными цилиндрами, если радиусы данных равны r .

ВЫХОД В ПРОСТРАНСТВО

Попробуйте решить следующую головоломку: из шести спичек сложить четыре правильных треугольника так, чтобы стороной каждого была целая спичка. Попытки решить ее к успеху как будто не приводят. Мало того, можно доказать, что такое

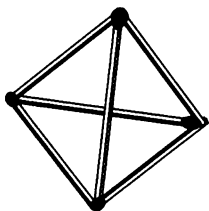


Рис. 1

построение не осуществимо на плоскости (попробуйте это сделать). Как же быть? Оказывается, нужно выйти в пространство – сложить из спичек правильный тетраэдр (рис. 1). Невозможное на плоскости осуществимо в трехмерном пространстве!

Выход в пространство бывает полезен и при решении некоторых планиметрических задач. Классическим примером является **теорема Дезарга**. Если два треугольника

$A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке, то три точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 , B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 расположены на одной прямой (рис. 2). Утверждение теоремы становится очевидным, если увидеть на рисунке 2 пространственную фигуру, а именно – трехгранный угол, пересеченный двумя плоскостями: одна плоскость пересекает ребра трехгранного угла в точках A_1 , B_1 и C_1 , а другая в точках A_2 , B_2 и C_2 . Три точки пересечения соответствующих сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и

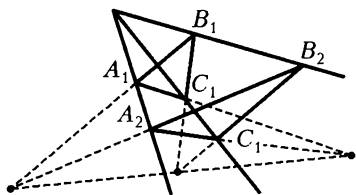


Рис. 2

$A_2B_2C_2$ принадлежат линии пересечения этих плоскостей и, значит, лежат на одной прямой.

С помощью выхода в пространство изящно доказывается и **теорема Бриансона**. Диагонали, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть $ABCDEF$ – плоский шестиугольник, описанный около окружности. Возьмем произвольный пространственный шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 3), отличный от $ABCDEF$, проекция которого на плоскость p

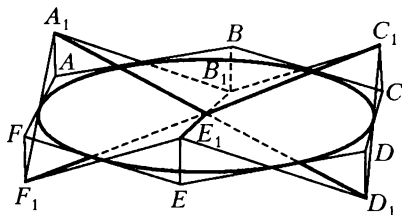


Рис. 3

есть шестиугольник $ABCDEF$ и соответствующие стороны которого проходят через точки касания шестиугольника $ABCDEF$ с окружностью. Для доказательства существования такого шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ достаточно одну вершину, например A_1 , взять произвольно на перпендикуляре к плоскости p , восстановленном в точке A ; тогда остальные вершины определяются однозначно. В самом деле, пусть a, b, c, d, e, f – длины касательных к окружности, проведенных соответственно через точки A, B, C, D, E, F , и h – расстояние от A_1 до плоскости шестиугольника $ABCDEF$. Тогда B_1 находится по другую сторону от плоскости, по сравнению с A_1 на расстоянии hb/a , C_1 – по ту же сторону плоскости, что и A_1 , на расстоянии $\frac{hb}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{hc}{a}$ от плоскости и т.д. Наконец, найдем, что F_1 лежит по другую сторону от плоскости, нежели A_1 , на расстоянии hf/a , и значит, A_1 и F_1 лежат на прямой, проходящей через точку касания AF с окружностью. Любые две противоположные стороны шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ расположены в одной плоскости (докажите самостоятельно). Следовательно, любые две диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, пересекаются, а отсюда и все три диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (они *не лежат* в одной плоскости) пересекаются в одной точке. Поскольку шестиугольник $ABCDEF$ – проекция шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, теорема доказала.

Заметим, что аналогично можно доказать и более общий факт. Если прямые AB, BC, CD, DE, EF и FA касаются одной окружности, то прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке или параллельны. Один из возможных случаев расположения точек A, B, C, D, E, F показан на рисунке 4.

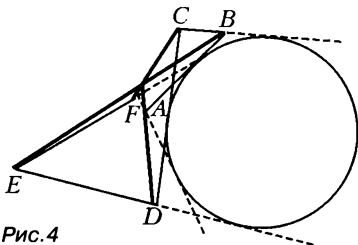
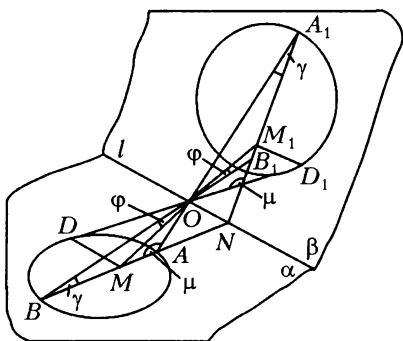


Рис. 4

Только что доказанная теорема Брианшона оказывается справедливой для шестиугольника, описанного около произвольного конического сечения (эллипса, параболы, гиперболы), поскольку произвольное коническое сечение можно спроектировать относительно некоторой точки на другую плоскость так, что его проекция будет окружностью. При этом прямые, касающиеся конического сечения, перейдут в прямые, касающиеся окружности.

Вот более сложный пример. *Докажите, что с помощью одной линейки нельзя найти центр окружности.*

Пусть данная окружность находится в плоскости α . Если мы докажем, что существует такая плоскость β и точка O , что проекцией данной окружности относительно точки O на плоскость β будет окружность, но при этом центр первой окружности переходит в точку, отличную от центра второй окружности, то



наша задача будет решена (рис.5). Действительно, любому построению с помощью одной линейки в плоскости α соответствует при проектировании построение с помощью одной линейки в плоскости β .

В качестве плоскости β возьмем произвольную плоскость, пересекающую плоскость α по прямой l , не проходящей через центр данной окружности. Пусть AB — диаметр данной ок-

Рис.5

ружности, перпендикулярный к l , а N — точка пересечения прямых AB и l . Восставим из точки N перпендикуляр к l , лежащий в плоскости β , и возьмем на нем точки A_1 и B_1 так, что $A_1N = BN$, $B_1N = AN$. В качестве точки O — центра проекции — возьмем точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 . Очевидно, середина отрезка AB проектируется в точку, отличную от середины отрезка A_1B_1 .

Возьмем произвольную точку D на данной окружности $DM \perp AB$. Проекцией DM будет $D_1M_1 \perp A_1B_1$. Докажем, что D_1 лежит на окружности, построенной на A_1B_1 как на диаметре. Воспользуемся тем, что $M_1D_1 \cdot MO = MD \cdot M_1O$ ($\triangle DMO \sim \triangle D_1M_1O$) и $MD^2 = BM \cdot MA$. Нам нужно доказать, что $MD_1^2 = B_1M_1 \cdot M_1A_1$ или, используя два предыдущих равенства,

получить, что

$$\frac{BM \cdot MA}{MO^2} = \frac{B_1M_1 \cdot M_1A_1}{M_1O^2},$$

$$\frac{BM}{MO} \cdot \frac{MA}{MO} = \frac{B_1M_1}{M_1O} \cdot \frac{M_1A_1}{M_1O}.$$

Заменяя в последнем равенстве отношения отрезков отношениями синусов противоположных углов соответствующих треугольников, получим очевидное равенство

$$\frac{\sin \varphi \sin \psi}{\sin \gamma \sin \mu} = \frac{\sin \varphi}{\sin \mu} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \gamma}.$$

Одной из самых красивых и неожиданных иллюстраций к теме «Выход в пространство» служит, пожалуй, решение этим методом известной **задачи Аполлония**. *Построить окружность, касательную к трем данным окружностям*. Поставим в соответствие каждой окружности в данной плоскости две точки пространства, расположенные по разные стороны от плоскости, удаленные от этой плоскости на расстояние, равное радиусу окружности, и такие, что проекция каждой из них на плоскость есть центр окружности. Обратно: каждой точке пространства соответствует окружность в нашей плоскости, центр которой совпадает с проекцией точки на плоскость, а радиус равен расстоянию от точки до плоскости. Прежде чем перейти к решению задачи Аполлония, обратим внимание на следующее обстоятельство: если P — одна из двух точек, соответствующих окружности k , то любой точке, находящейся на конической поверхности, вершиной которой является точка P , а направляющей — окружность k (рассматриваются обе половины этой поверхности), соответствует окружность, касающаяся окружности k (рис.6).

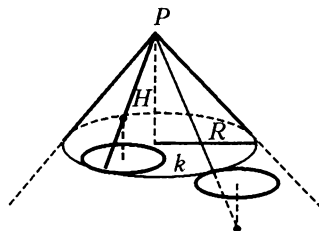


Рис.6

Пусть теперь даны три окружности на плоскости. Построим для каждой указанным выше способом одну из двух конических поверхностей. Точке пересечения этих трех поверхностей соответствует окружность, касающаяся трех данных. Беря различные расположения точек, соответствующих окружностям, можно получить все решения нашей задачи.

Мы привели несколько примеров, когда помогает трехмерное пространство. А может ли помочь четырехмерное пространство? Конечно, да! Например, с его помощью можно решить такую головоломку: *из десяти спичек сложить десять правильных треугольников так, чтобы сторона каждого треугольника равнялась целой спичке.*

Решение. Нужно выйти в четырехмерное пространство и сложить в нем многогранник, аналогичный тетраэдру. Такие

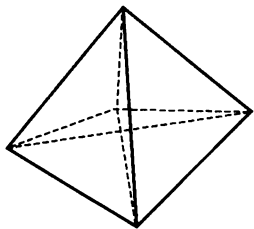


Рис. 7

многогранники называются *симплексами*. Симплекс на плоскости – это треугольник, в трехмерном пространстве – тетраэдр; что представляет собой симплекс в четырехмерном пространстве, можно понять из рисунка 7. Этот пример, конечно, серьезен лишь наполовину, а вот уже вполне серьезный пример. Пусть три плоскости пересекаются по одной прямой. Рассмотрим три трехгранных угла, вершины которых расположены на этой прямой, а ребра лежат в данных плоскостях (предполагаем, что соответствующие ребра, т.е. ребра, расположенные в одной плоскости, не пересекаются в одной точке). Тогда *три точки пересечения соответствующих граней этих трехгранных углов лежат на одной прямой* (рис. 8). Поскольку

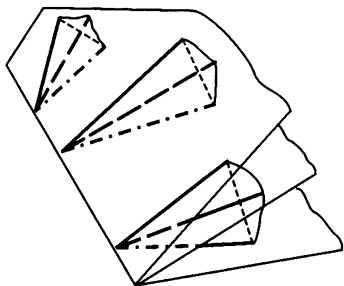


Рис. 8

для доказательства этой теоремы мы хотим «выйти» в четырехмерное пространство, расскажем сначала о некоторых свойствах этого пространства.

Простейшими фигурами четырехмерного пространства будут точка, прямая, плоскость и трехмерное многообразие, которое мы будем называть гиперплоскостью. Первые три фигуры – это наши старые знакомые из трехмерного пространства. Правда, некоторые утверждения, связанные с ними, нуждаются в перефразировке. Например, вместо следующей аксиомы трехмерного пространства: если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, – следует ввести аксиому: если две различные плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости, имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Введение нового геомет-

рического образа – гиперплоскости – заставляет ввести связанную с ним группу аксиом, аналогично тому, как при переходе от геометрии плоскости, – планиметрии, к геометрии трехмерного пространства, – стереометрии, вводится группа аксиом (вспомните, каких?), выражающих основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом:

1. Какова бы ни была гиперплоскость, существуют точки, ей принадлежащие, и точки, ей не принадлежащие.

2. Если две различные гиперплоскости имеют общую точку, то они пересекаются по плоскости, т.е. существует плоскость, принадлежащая каждой из гиперплоскостей.

3. Если прямая, не принадлежащая плоскости, имеет с ней общую точку, то существует единственная гиперплоскость, содержащая эту прямую и эту плоскость.

Из этих аксиом непосредственно следует, что четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, определяют гиперплоскость; точно так же три прямые, не принадлежащие одной плоскости, но имеющие общую точку или две различные плоскости, имеющие общую прямую, определяют гиперплоскость. Мы не будем доказывать эти утверждения; попытайтесь сделать это самостоятельно.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий факт, справедливый в четырехмерном пространстве: три различные гиперплоскости, имеющие общую точку, имеют общую прямую. В самом деле, по аксиоме 2, любые две из трех гиперплоскостей имеют общую плоскость. Возьмем две плоскости, по которым пересекается какая-то из трех гиперплоскостей с двумя другими. Эти две плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости – трехмерному многообразию, имеют общую точку, и, значит, пересекаются по прямой или совпадают.

Перейдем теперь к доказательству нашего утверждения. Если бы три плоскости, о которых говорится в условии, были расположены в четырехмерном пространстве, то утверждение было бы очевидным. Действительно, каждый трехгранный угол определяет гиперплоскость. Две гиперплоскости пересекаются по плоскости. Эта плоскость не принадлежит третьей гиперплоскости (по условию, эти гиперплоскости пересекают одну из данных плоскостей по трем прямым, не проходящим через одну точку), и, следовательно, пересекается с ними по прямой линии. Любые три соответствующие грани трехгранных углов лежат в одной гиперплоскости, определяемой двумя плоскостями, на которых расположены соответствующие ребра, и поэтому каждая тройка соответствующих граней имеет общую точку. Три эти точки принад-

лежат трем гиперплоскостям, определяемым трехгранными углами, и, как было доказано, лежат на одной прямой. Теперь для завершения доказательства достаточно «увидеть» в данном условии задачи проекцию соответствующей четырехмерной конфигурации плоскостей и трехгранных углов.

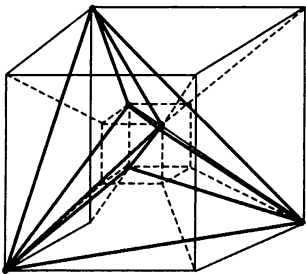


Рис.9

В заключение мне бы хотелось предостеречь читателя: не следует чрезмерно доверять своей «трехмерной интуиции», когда речь идет о четырехмерном пространстве.

Как вы думаете, сколько вершин может иметь выпуклый многогранник, для которого каждый отрезок, соединяющий любые две его вершины, является ребром? На

плоскости таким свойством обладает только треугольник, в пространстве – тетраэдр. В четырехмерном же пространстве существуют такие многогранники со сколь угодно большим числом вершин (см., например, рис.9).

Упражнения

1. По четырем прямым плоскости с постоянными скоростями идут четыре пешехода A , B , C , D . Известно, что пешеходы A , B и C встречаются друг с другом, пешеход D встречается с A и B . Докажите, что пешеходы C и D встречаются.

2. На плоскости даны три непересекающиеся окружности. Рассмотрим шесть точек, каждая из которых является точкой пересечения общих внутренних или общих внешних касательных к каким-то двум из данных окружностей. Докажите, что эти шесть точек лежат на четырех прямых, по три на каждой.

3. Даны три параллельные прямые и три точки на плоскости. Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны проходят через данные точки.

4. Три точки A , B и C лежат на одной прямой. Возьмем произвольную окружность, проходящую через A и B , и проведем к ней из C две касательные – CM и CN . Докажите, что точка пересечения прямых MN и AB постоянна.

5. Пусть A – данная точка внутри данной окружности, BC – произвольная хорда, проходящая через A . Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке M . Найдите геометрическое место точек M .

6. Покажите, что в четырехмерном пространстве две плоскости могут пересекаться в одной точке.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Сначала приведем два решения одной задачи.

Задача 1. Доказать, что квадрат биссектрисы, проведенной через вершину произвольного треугольника, равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания.

Нужно доказать, что $l^2 = ab - mn$ (рис.1). Положим $\angle ADB = \alpha$. По теореме косинусов для треугольников ABD и BDC имеем:

$$a^2 = l^2 + m^2 - 2ml \cos \alpha, \quad (1)$$

$$b^2 = l^2 + n^2 + 2nl \cos \alpha. \quad (2)$$

Умножим (1) на n , а (2) на m и сложим полученные выражения. Учитывая, что $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, мы легко преобразуем сумму к виду $l^2 = ab - mn$.

Это и есть алгебраический метод.

Прежде чем прочитать следующее решение, попытайтесь сами решить эту задачу геометрически.

Итак, чисто геометрическое решение. Опишем вокруг треугольника ABC окружность (рис.2) и продолжим биссектрису до пересечения с этой окружностью в точке E . По известной теореме $mn = l \cdot DE$. Кроме того, из подобия треугольников BCE и ABD следует

$$\frac{a}{l} = \frac{l + DE}{b}, \text{ откуда } ab = l^2 + l \cdot DE.$$

Заменяя $l \cdot DE$ на mn , получим требуемый результат.

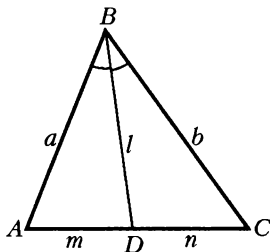


Рис. 1

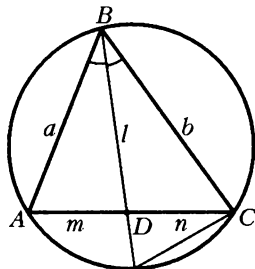


Рис. 2

Конечно, это решение короче и изящнее предыдущего, но, чтобы до него додуматься, вероятно, нужно довольно много времени.

Алгебраический метод основан на тех или иных стандартных приемах. Можно выделить две разновидности алгебраического метода:

- а) «прямой счет»;
- б) «составление уравнений».

Сущность «прямого счета» заключается в следующем. Величины, заданные в условии задачи, и те, которые нужно найти, мы связываем цепочкой промежуточных величин, каждая из которых последовательно определяется через предыдущие.

Задача 2 (МГУ, геофак, 1966). В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами (рис.3).

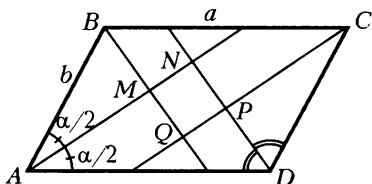


Рис.3

углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами (рис.3).

Полезно прежде всего составить план решения задачи, другими словами, выписать цепочку элементов, которые можно последовательно вычислить, соединяющую то, что

дано, и то, что нужно найти.

Прежде всего заметим, что $MNPQ$ – параллелограмм. Найдем последовательно $\angle ABC$, $\angle ABM$, $\angle AMB = \angle QMN$. Затем из $\triangle BCQ$ (по теореме синусов) найдем BQ , из $\triangle BMA$ – BM и AM , из $\triangle NAD$ – AN . После этого легко подсчитать MN и QM и искомую площадь $S = QM \cdot MN \cdot \sin \angle QMN$.

Итак, $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$, $\angle ABM = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, $\angle AMB = 90^\circ = \angle QMN$, т.е. $MNPQ$ – прямоугольник, $BQ = a \sin \frac{\alpha}{2}$, $BM = b \sin \frac{\alpha}{2}$, $MQ = BQ - BM = (a - b) \sin \frac{\alpha}{2}$ и т.д. Ответ получается следующий:

$$S = \frac{1}{2}(a - b)^2 \sin \alpha.$$

Приведем теперь пример задачи на «составление уравнений».

Задача 3 (МГУ, геофак, отд. геофизики, 1973). На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром внутри угла касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D ; $AB = \sqrt{6}$, $CD = \sqrt{7}$. Найти радиус окружности.

Пусть O – центр окружности, R – ее радиус, M – точка касания (рис.4). Расстояние от центра до AB обозначим через x . Сразу можно составить первое уравнение: $R^2 - x^2 = AN^2$.

Проведем $OP \perp CD$, $OP = \frac{OE}{\sqrt{2}} = \frac{R-x}{\sqrt{2}}$. Теперь можно составить и второе уравнение

$$R^2 - \left(\frac{R-x}{\sqrt{2}} \right)^2 = CP^2.$$

Воспользуемся тем, что $AN = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $CP = \frac{\sqrt{7}}{2}$, и составим систему

$$\begin{cases} R^2 - x^2 = \frac{6}{4}, \\ R^2 - \left(\frac{R-x}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Решая ее, находим $R = \sqrt{2}$.

При решении задач на «составление уравнений» часто нет необходимости в том, чтобы число неизвестных и число уравнений совпадали. Важно, чтобы при составлении уравнений были использованы все соотношения, вытекающие из условия. Если это требование соблюдено, то необходимое неизвестное или комбинация неизвестных должны определяться составленной системой.

Подобная ситуация может встречаться и в задачах на «прямой счет».

Задача 4. Окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внутренним образом в точке A . Хорда CD большей окружности перпендикулярна диаметру AB меньшей окружности, E – точка пересечения CD с окружностью радиуса g , точки E и C лежат по одну сторону от AB . Найти радиус окружности, описанной около треугольника AEC .

Обозначим $\angle CEA$ через φ и AF через a (рис.5). Из треугольника $СAM$ получим $AC = \sqrt{2aR}$, аналогично $AE = \sqrt{2ar}$. По теореме синусов из треугольника AEC получаем для искомого радиуса значение

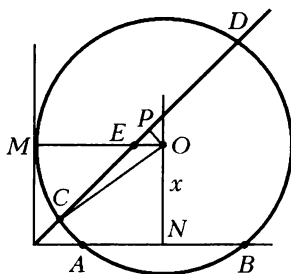


Рис. 4

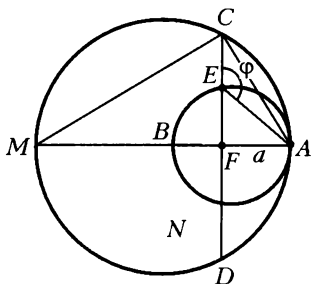


Рис. 5

$\frac{AC}{2 \sin \varphi}$. Значение $\sin \varphi$ легко найти из треугольника FEA .

Ответ: \sqrt{Rr} .

Нам пришлось ввести параметры a , φ , так как условием задачи геометрическая конфигурация не определена полностью. Но в ответ эти параметры не входят.

Задача 5 (МФТИ, 1967). В прямоугольном треугольнике ABC катет $AB = 3$, катет $AC = 6$. Центры окружностей радиусов 1, 2 и 3 находятся соответственно в точках A , B и C . Найти радиус окружности, касающейся каждой из трех данных окружностей внешним образом.

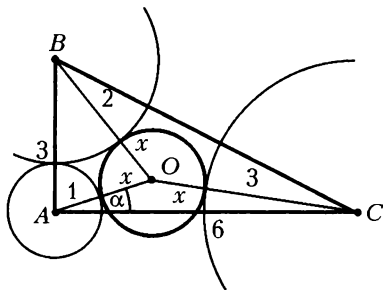


Рис. 6

Пусть O – центр искомой окружности, x – ее радиус, $\angle OAC = \alpha$ (рис. 6). Запишем теорему косинусов для треугольников AOC и AOB . Получим систему уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^2 = (x+1)^2 + 36 - 12(x+1)\cos\alpha, \\ (x+2)^2 = (x+1)^2 + 9 - 6(x+1)\sin\alpha. \end{cases}$$

Выразив из этих уравнений $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ и используя соотношение $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, мы получим уравнение, содержащее лишь одно неизвестное x ; решив это уравнение, получим

ответ: $x = \frac{8\sqrt{11} - 19}{7}$.

Заметим, что использование теоремы косинусов для составления уравнений – один из наиболее часто встречающихся приемов. Вообще правильный выбор неизвестных играет весьма важную роль при решении геометрических задач. Здесь многое зависит от опыта и интуиции.

Задача 6 (МФТИ, 1966). Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $AO = \sqrt{3}MO$, $NO = (\sqrt{3} - 1)BO$. Найти углы треугольника ABC .

Введем следующие неизвестные (рис. 7): $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$. $\frac{MC}{BM} = \frac{AC}{AB}$, поэтому $MB = \frac{zx}{y+z}$, аналогично $AN = \frac{yz}{x+z}$. Теперь, рассмотрев треугольники BMA и BAN с

биссектрисами BO и AO , нетрудно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{z+y} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{y}{x+z} = \sqrt{3}-1. \end{cases}$$

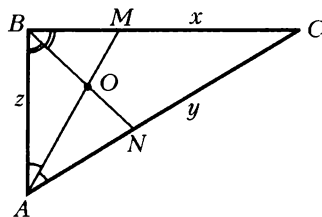


Рис. 7

Далее можно выразить все неизвестные через одно (например, через x) и по теореме косинусов найти углы треугольника – 30° , 60° и 90° . Попробуйте решить эту задачу, взяв за неизвестные искомые углы, и вы убедитесь, что решение сильно усложняется.

Необходимо отметить тот факт, что большинство задач, решаемых алгебраическим методом, могут иметь два варианта решения – как «прямой счет», так и «составление уравнений», эти способы не взаимоисключают друг друга.

Задача 7. Внутри острого угла α взята точка A , удаленная от сторон угла на p и q . Найти расстояние от точки A до вершины угла.

Пусть M – точка пересечения AC и OB (рис.8), легко заметить, что $\angle BAM = \alpha$. Теперь находим $MC = q + \frac{p}{\cos \alpha}$, $OC = MC \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{q \cos \alpha + p}{\sin \alpha}$. Искомое расстояние AO находим из треугольника AOC :

$$AO = \frac{\sqrt{p^2 + 2pq \cos \alpha + q^2}}{\sin \alpha}.$$

Это – «прямой счет». Между тем нетрудно решить задачу и «составлением уравнений», причем решения обоими путями, пожалуй, не уступают друг другу в рациональности. Итак, «составление уравнений».

Введем неизвестные $\angle AOC = \varphi$, $AO = x$. Рассмотрев треугольники AOB и AOC , составляем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x \sin \varphi = q, \\ x \sin (\alpha - \varphi) = p. \end{cases}$$

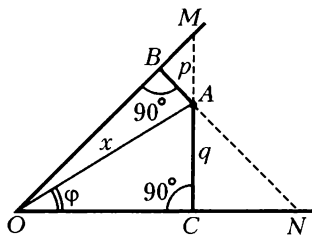


Рис. 8

Решите эту систему самостоятельно.

Если еще раз внимательно просмотреть примеры, приведенные в статье, легко заметить, что почти во всех примерах делались некоторые дополнительные построения, использовался ряд геометрических соображений. Итак, решая планиметрическую задачу алгебраическим методом, все же не следует забывать, что это именно планиметрическая задача, а не алгебраическая, т.е. нельзя проходить мимо геометрических соображений, так как они обычно упрощают решение. В противном случае вы можете превратить простейшую геометрическую задачу в более громоздкую алгебраическую, как это случилось, например, при решении следующей задачи с авторами одного пособия для поступающих.

Задача 8 (МГУ, геофак, 1969). В равнобоковой трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 6$, высота трапеции равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на углы BAC и CAD . Какой из этих углов больше?

Решение этой задачи, предложенное в упомянутом пособии, заключалось в следующем. Пусть $\angle BAC = \alpha$ (рис.9), $\angle CAD = \beta$.

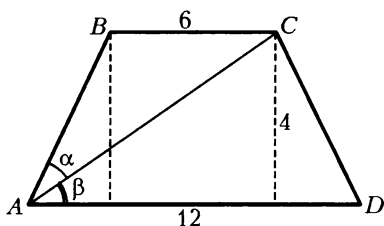


Рис.9

Сначала можно вычислить $\operatorname{tg} \angle BAD = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, затем $\operatorname{tg} \beta$ и, наконец, применяя тригонометрические формулы, найти $\operatorname{tg} \alpha$. Сравнивая $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$, получим ответ на поставленный в задаче вопрос. Между тем значительно проще заметить, что $\angle BCA = \beta$ и $AB = 5$ (по

теореме Пифагора). Из треугольника ABC $\alpha > \beta$, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Упражнения

1 (МГУ, геофак, 1966). В равнобедренной трапеции основания равны a и b , а угол диагонали с основанием равен α . Найдите длину отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой боковой стороны трапеции.

2 (МГУ, физфак, 1963). В окружности радиуса R через точку M диаметра проведена хорда AB под углом φ к диаметру; при этом $BM : AM = p : q$. Через точку B проведена хорда BC , перпендикулярная к данному диаметру, и точка C соединена с точкой A . Найдите площадь треугольника ABC .

3 (МГУ, экономический ф-т, 1968). В трапеции $ABCD$ углы при большем основании a равны α и β , а высота трапеции h . Пусть

O_1, O_2, O_3, O_4 – центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ABC, BCD, CDA, DAB . Найдите площадь четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$.

4. Окружности радиусов R и r пересекаются. Проведем к ним общую касательную. Пусть точка A пересечения окружностей и точки касания B и C лежат по разные стороны от линии центров. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

5 (МГУ, мехмат, 1968). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M , а перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону BC , пересекает BC в точке N так, что $BN = NC$ и $AM = 2MD$. Найдите стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5 + \sqrt{3}$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$.

6 (МФТИ, 1967). Окружности радиусов R и r касаются внутренним образом в точке A . Найдите сторону правильного треугольника ABC , вершины B и C которого лежат соответственно на окружностях радиуса R и r .

7. Прямая l пересекает боковые стороны AB и BC равнобедренного треугольника ABC соответственно в точках M и N . Известно, что $\frac{AM}{BM} = m$, $\frac{CN}{BN} = n$. Найдите отношение, в котором прямая делит высоту треугольника, опущенную из вершины B .

8 (МГУ, физфак, 1969). В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) медианы, проведенные из вершин B и C к сторонам AC и AB соответственно, обратно пропорциональны этим сторонам. Найдите стороны AC и AB треугольника, если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$.

9 (МГУ, мехмат, 1971). В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найдите его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB = 2BC$.

10 (МГУ, физфак, 1974). Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C , и $\angle BCD < \pi/3$. Точка K – середина AC , L – середина CE , M – середина BD . Площадь треугольника KLM равна $\sqrt{3}/5$. Найдите BD .

ДОСТРАИВАНИЕ ТЕТРАЭДРА

Один из красивых приемов, который может быть использован при решении геометрических задач, состоит в замене изучаемой геометрической фигуры другой, в каком-то смысле более удобной. Так, например, если в условии задачи фигурирует треугольник, в котором проведена медиана, часто полезно достроить этот треугольник до параллелограмма, продолжая медиану на расстояние, равное ей самой. В данной статье рассматриваются не-

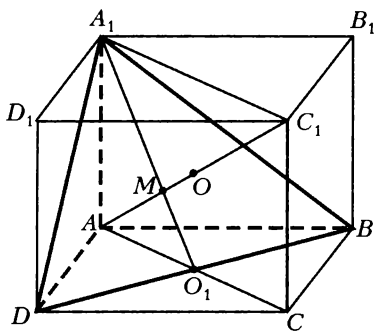


Рис. 1

сколько задач про треугольную пирамиду – тетраэдр, – которые оказывается возможным решить, достраивая тетраэдр до другого многогранника (как правило, параллелепипеда).

Первый способ дистраивания пирамиды до параллелепипеда изображен на рисунке 1. Здесь AA_1BD – данная пирамида, а плоскости граней DCC_1D_1 , CBB_1C_1 и $A_1B_1C_1D_1$ параллелепипеда проходят

через одну вершину пирамиды и параллельны грани пирамиды, противолежащей этой вершине.

Задача 1. (Пункт а) задачи предлагался на вступительном экзамене на механико-математическом факультете МГУ.) Дана треугольная пирамида AA_1BD , в которой ребра AA_1 , AB и AD попарно перпендикулярны, а их длины равны соответственно a , b , c .

а) Доказать, что вершина A пирамиды, точка пересечения медиан грани A_1BD и центр описанного шара лежат на одной прямой.

б) Найти радиус шара, описанного около этой пирамиды.

Достроим пирамиду AA_1BD до параллелепипеда (прямоугольного!), как показано на рисунке 1. Тогда шар, описанный около этой пирамиды, является одновременно описанным шаром и для всего параллелепипеда. Радиус этого шара равен половине диагонали параллелепипеда, а именно $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$, это является ответом на пункт б).

Чтобы доказать утверждение пункта а), рассмотрим прямоугольник AA_1C_1C (советуем сделать для него отдельный чертеж). Центр O шара находится на диагонали AC_1 , медиана A_1O_1 треугольника A_1BD пересекается с AC_1 в точке M , и если мы докажем, что $\frac{A_1M}{MO_1} = 2$, то это будет означать, что M – точка пересечения медиан треугольника A_1BD , тем самым мы докажем утверждение пункта а). Из подобия треугольников A_1C_1M и AO_1M следует:

$$\frac{A_1M}{MO_1} = \frac{A_1C_1}{AO_1} = 2,$$

что и требовалось доказать.

Другой часто встречающийся способ достраивания тетраэдра до параллелепипеда состоит в следующем. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Эти плоскости ограничат некоторый параллелепипед (рис.2), диагоналями граней которого будут ребра исходного тетраэдра.

Небольшой практический совет: чертеж удобнее начинать с изображения параллелепипеда.

Задача 2. Найти радиус шара, касающегося всех ребер правильно-го тетраэдра, длина ребра которого равна a .

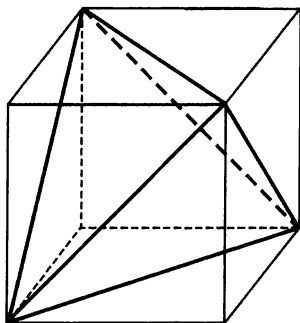


Рис.2

Как легко видеть из рисунка 2, построенный описанным способом параллелепипед будет кубом с ребром $a/\sqrt{2}$ шар, вписанный в этот куб, будет искомым. Ответ: $a/(2\sqrt{2})$.

Первый из предложенных способов достраивания тетраэдра до параллелепипеда удобен, когда даны плоские углы при одной из вершин тетраэдра (особенно если все они прямые), второй используется в задачах, в которых фигурируют скре-

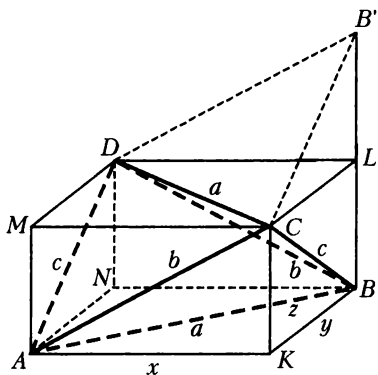


Рис.3

параллелепипед ограничен плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам. Так как диагонали каждой грани равны соответственно противоположным ребрам тетраэдра, которые по условию равны, то все грани параллелепипеда – прямоугольники, а сам параллелепипед – прямоугольный.

Центр вписанного в тетраэдр $ABCD$ шара совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелепипеда (докажите!), а центр шара, касающегося грани DCB тетраэдра (из дальнейшего видно, что ответ не зависит от выбора грани) и продолжений его остальных граней, совпадает с вершиной L параллелепипеда (она равноудалена от граней DCB и ACD – для доказательства рассмотрите пирамиду $B'LCD$, где $B'L = LB$, равную пирамиде $BLCD$ – точки A, D, B' и C лежат в одной плоскости; аналогично доказывается, что точка L равноудалена от плоскостей DCB и ACB, DCB и ADB).

Значит, расстояние, о котором говорится в условии задачи, равно половине длины диагонали параллелепипеда. Обозначим через x, y, z длины ребер параллелепипеда (см. рис.3). По теореме Пифагора получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = c^2, \end{cases}$$

складывая которые, находим, что

$$\frac{AL}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

сшивающиеся ребра тетраэдра.

Задача 3. Длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра равны a , два других скрещивающихся ребра имеют длину b и оставшиеся два – c . Найти расстояние между центром вписанного в тетраэдр шара и центром шара, касающегося одной из граней тетраэдра и продолжений остальных граней.

На рисунке 3 $ABCD$ – данный тетраэдр, а параллелепипед ограничен плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам. Так как диагонали каждой грани равны соответственно противоположным ребрам тетраэдра, которые по условию равны, то все грани параллелепипеда – прямоугольники, а сам параллелепипед – прямоугольный.

Значит, расстояние, о котором говорится в условии задачи, равно половине длины диагонали параллелепипеда. Обозначим через x, y, z длины ребер параллелепипеда (см. рис.3). По теореме Пифагора получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = c^2, \end{cases}$$

складывая которые, находим, что

$$\frac{AL}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

Задача 4. Сечение тетраэдра плоскостью, параллельной двум его скрещивающимся ребрам и равноудаленной от этих ребер, имеет площадь S . Расстояние между этими скрещивающимися ребрами тетраэдра равно h . Найти объем тетраэдра.

Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед, ограниченный плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам (рис.4). Тогда объем тетраэдра $A_1 B C_1 D$ равен объему параллелепипеда минус объемы четырех треугольных пирамид (одна из них $A_1 A B D$), объем каждой из которых равен $1/6$ объема параллелепипеда (почему?). Значит, $V_{\text{тетр}} = V_{\text{пар}}/3$.

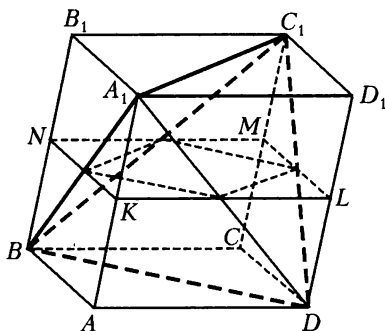


Рис.4

Пусть скрещивающиеся ребра, о которых говорится в условии, $A_1 C_1$ и BD , а $KLMN$ – сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 . Тогда вершинами сечения, о котором говорится в условии, будут середины сторон параллелограмма $KLMN$. Следовательно, площадь параллелограмма $KLMN$ равна 25 и равна площади основания $ABCD$ параллелепипеда. Теперь найдем объемы параллелепипеда и тетраэдра:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} V_{\text{пар}} = \frac{2}{3} Sh.$$

С помощью только что решенной задачи нетрудно доказать справедливость формулы Симпсона, служащей для вычисления объема многогранников специального вида.

Дан многогранник, все вершины которого лежат в двух параллельных плоскостях, находящихся на расстоянии h друг от друга. Пусть S_1 – площадь грани, лежащей в одной плоскости, S_2 – площадь грани, расположенной во второй плоскости, а $S_{\text{ср}}$ – площадь сечения многогранника плоскостью, удаленной на расстояние $\frac{h}{2}$ от каждой из данных плоскостей. Тогда для объема многогранника справедлива формула:

$$V = \frac{h}{6} (S_1 + S_2 + 4S_{\text{ср}}).$$

Для доказательства проверьте, что эта формула верна, если многогранник является тетраэдром, а потом разбейте произвольный многогранник, вершины которого расположены в двух параллельных плоскостях, на тетраэдры с вершинами в этих же плоскостях: площади граней тетраэдров, расположенных в одной плоскости, в сумме дадут S_1 , расположенных во второй плоскости дадут в сумме S_2 , а сумма площадей средних сечений тетраэдров равна $S_{\text{ср}}$ многогранника.

В заключение приведем пример задачи, в которой оказывается удобнее достраивать тетраэдр не до параллелепипеда, а до треугольной призмы.

Задача 5. В тетраэдре площади двух граней равны S_1 и S_2 , двугранный угол между ними равен α , площади двух других граней Q_1 и Q_2 , угол между ними β . Доказать, что

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 \cos \beta.$$

Докажем сначала, что если площадь одной боковой грани треугольной призмы равна S , две другие грани имеют площади S_1 и S_2 , а двугранный угол между ними α , то

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = S^2.$$

В самом деле, пусть плоскость ABC (рис.5) перпендикулярна боковым ребрам призмы, $\angle BAC = \alpha$. Запишем теорему косинусов для треугольника ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha.$$

Осталось умножить последнее равенство на l^2 , где l – длина бокового ребра призмы.

Перейдем теперь к решению задачи 5. Пусть $ABCD$ – данный тетраэдр, $S_{\Delta ABD} = S_1$, $S_{\Delta ADC} = S_2$, $S_{\Delta ABC} = Q_1$, $S_{\Delta DBC} = Q_2$, двугранный угол при ребре AD равен α , а при ребре BC – β . Рассмотрим треугольную призму с основанием ABC , одно из боковых ребер которой – AD (рис.6). Обозначим через S площадь параллелограмма BB_1C_1C , тогда по только что доказанной нами формуле

$$4S_1^2 + 4S_2^2 - 8S_1S_2 \cos \alpha = S^2,$$

причем S легко выразить через длины ребер BC и AD и угол φ между ними: $S = AD \cdot BC \cdot \sin \varphi$.

Если мы рассмотрим другую треугольную призму с основанием ACD и боковым ребром BC , то получим

$$4Q_1^2 + 4Q_2^2 - 8Q_1Q_2 \cos \beta = S^2.$$

Отсюда следует утверждение задачи 5.

Упражнения

1. Докажите, что сумма квадратов длин ребер тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов расстояний между серединами его скрещивающихся ребер.

2. (МГУ, физфак, 1964). Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что его ребра AD и BC взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда выполняется равенство

$$AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2.$$

3. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны a , длины двух других противоположных ребер равны b , оставшихся двух — c . Найдите

- объем этого тетраэдра;
- радиус описанного вокруг него шара.

4. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны a и a_1 угол между ними равен α , длины двух других ребер соответственно равны b и b_1 угол между ними β и, наконец, длины двух оставшихся ребер равны c и c_1 угол между ними γ ($\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$).

а) Докажите, что одно из чисел $aa_1 \cos \alpha$, $bb_1 \cos \beta$, $cc_1 \cos \gamma$ равно сумме двух других.

б) Найдите углы α, β и γ , если даны a, a_1, b, b_1, c, c_1 .

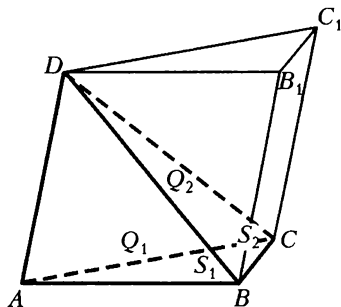


Рис. 6

ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ

Геометрия начинается с треугольника. Взяв школьный учебник по геометрии, мы увидим, что первые содержательные теоремы касаются именно треугольника. Все предыдущее – лишь аксиомы, определения или простейшие из них следствия. На заре своего возникновения планиметрия по существу и была «геометрией треугольника». «Геометрия треугольника» может гордиться теоремами, носящими имена Эйлера, Торичелли, Лейбница. На рубеже XIX–XX веков благодаря большому количеству работ, посвященных треугольнику, образовался даже целый раздел планиметрии, названный «Новой геометрией треугольника». Многие из этих работ сейчас выглядят малоинтересными, несовершенными; используемая в них терминология полузабыта и встречается разве что в энциклопедиях. Однако некоторые теоремы «Новой геометрии» продолжают жить и по сей день. О двух таких теоремах – Чевы и Менелая – рассказывается в этой статье.

Теоремы Чевы и Менелая можно назвать «двойственными» теоремами: они похоже формулируются (причем каждая теорема выступает как бы в двух обличьях) и доказываются, они взаимозаменяемы при решении задач. Теоремы Чевы и Менелая оказываются особенно полезными в тех случаях, когда нужно «выяснить отношения» между точками и прямыми, – например, доказать, что какие-то три прямые пересекаются в одной точке, три точки лежат на одной прямой и т.п.

Что вы знаете о медианах, высотах, биссектрисах треугольника? Наверное, каждый из вас, подумав, сможет доказать, что, например, биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и высоты – тоже, и медианы (теоремы о биссектрисах и медианах треугольника, конечно же, есть в школьных учебниках по геометрии)... Однако доказательства этих теорем не так-то уж просты. Оказывается, любое из этих утверждений легко получить, если знать... теорему Чевы.

Обозначения и формулировки теорем

Нам понадобятся векторы; мы будем обозначать их, как обычно: либо маленькими латинскими буквами со стрелочкой сверху: \vec{a} , \vec{b} , \vec{a}_1 ..., либо двумя большими буквами со стрелочкой: \overline{AB} , $\overline{AA_1}$ и т.д. Под углом $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ между двумя векторами \vec{a} и \vec{b} мы будем понимать угол, на который нужно повернуть вектор \vec{a} в положительном направлении (против хода часовой стрелки) до совпадения с направлением вектора \vec{b} (рис.1). Положим для определенности, что $0 \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) < 2\pi$.² Из этого определения и свойств функции $y = \sin x$ сразу следует, что

$$\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = -\sin \angle(\vec{b}, \vec{a}).$$

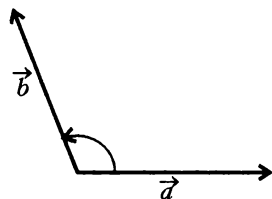


Рис. 1

Рассмотрим два треугольника: ABC (обозначим его через Δ) и $A_1B_1C_1$, вершины A_1 , B_1 и C_1 которого лежат на прямых BC , AC и AB соответственно; обозначим треугольник $A_1B_1C_1$ через Δ_1 . Легко видеть, что векторы $\overline{AC_1}$ и $\overline{C_1B}$ коллинеарны; точно так же коллинеарны и векторы $\overline{BA_1}$, $\overline{A_1C}$ и $\overline{CB_1}$, $\overline{B_1A}$. Введем для коллинеарных векторов \overline{AB} и \overline{CD} величину $\left\{ \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \right\}$, равную отношению длин векторов \overline{AB} и \overline{CD} , взятую со знаком «+», если векторы \overline{AB} и \overline{CD} сонаправлены, и со знаком «-» в противном случае. Определим теперь для треугольников Δ и Δ_1 величину $R(\Delta, \Delta_1)$:

$$R(\Delta, \Delta_1) = \left\{ \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \right\}. \quad (1)$$

Пусть далее ω – тройка векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , коллинеарных векторам \overline{BC} , \overline{AC} и \overline{AB} (сторонам треугольника ABC), ω_1 – тройка векторов \vec{a}_1 , \vec{b}_1 и \vec{c}_1 , коллинеарных векторам $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$

¹ Наше определение угла между векторами несколько отличается от школьного. Поэтому мы и ввели обозначение $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Благодаря такому определению угла, как это будет видно из дальнейшего, удастся доказать ряд довольно изящных утверждений.

и $\overline{CC_1}$. Определим для ω и ω_1 величину $R^*(\omega, \omega_1)$:

$$R^*(\omega, \omega_1) = \frac{\sin \angle(\vec{b}, \vec{c}_1)}{\sin \angle(\vec{a}, \vec{c}_1)} \cdot \frac{\sin \angle(\vec{c}, \vec{a}_1)}{\sin \angle(\vec{b}, \vec{a}_1)} \cdot \frac{\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}_1)}{\sin \angle(\vec{c}, \vec{b}_1)}. \quad (2)$$

Лемма.

$$R(\Delta, \Delta_1) = R^*(\omega, \omega_1). \quad (3)$$

Доказательство. Сначала проверим, что R и R^* одного знака. Легко

убедиться, что изменение направления одного из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ не изменит величины $R^*(\omega, \omega_1)$, поэтому можно выбрать направление каждого из них определенным образом; например, можно считать векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ совпадающими по направлению с векторами $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}, \overline{AA_1}, \overline{BB_1}$ и $\overline{CC_1}$ (рис.2). В этом случае каждая из трех дробей, входящих в выражение $R(\Delta, \Delta_1)$, имеет тот же знак, что и соответствующая дробь, входящая в выражение $R^*(\omega, \omega_1)$. Например, дроби

$$\left\{ \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \right\} \text{ и } \frac{\sin \angle(\vec{b}, \vec{c}_1)}{\sin \angle(\vec{a}, \vec{c}_1)}$$

будут положительны, если точка C_1 расположена между точками A

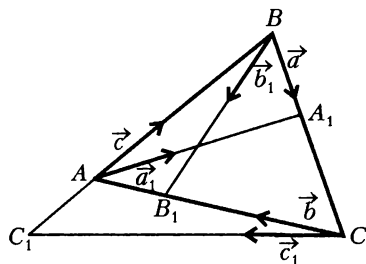


Рис.2

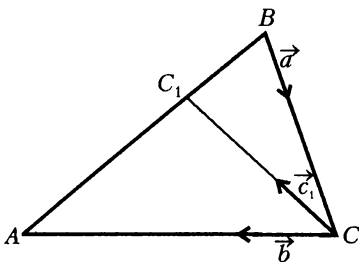


Рис.3

и B , и отрицательны в противоположном случае (рис.3 и 2).

Осталось доказать, что $R(\Delta, \Delta_1) = R^*(\omega, \omega_1)$. Имеем

$$\left| \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \right| = \frac{S_{\Delta ACC_1}}{S_{\Delta BCC_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot CC_1 \cdot \sin \angle(\vec{b}, \vec{c}_1)}{\frac{1}{2} BC \cdot CC_1 \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{c}_1)} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{|\sin \angle(\vec{b}, \vec{c}_1)|}{|\sin \angle(\vec{a}, \vec{c}_1)|},$$

$$\left| \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \right| = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{|\sin \angle(\vec{c}, \vec{a}_1)|}{|\sin \angle(\vec{b}, \vec{a}_1)|},$$

$$\left| \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \right| = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{|\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}_1)|}{|\sin \angle(\vec{c}, \vec{b}_1)|}.$$

Перемножая эти три равенства, получим, что $|R(\Delta, \Delta_1)| = |R^*(\omega, \omega_1)|$.
Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится равенство, непосредственно вытекающее из определения $R^*(\omega, \omega_1)$:

$$R^*(\omega, \omega_1) = \frac{1}{R^*(\omega_1, \omega)} \cdot {}^2 \quad (4)$$

Сформулируем теперь теоремы Чевы и Менелая.

Теорема Чевы. *Для того чтобы прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$R(\Delta, \Delta_1) = 1 \quad (5)$$

или эквивалентное ему равенство

$$R^*(\omega, \omega_1) = 1. \quad (5')$$

Теорема Менелая. *Для того чтобы точки A_1 , B_1 , C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$R(\Delta, \Delta_1) = -1 \quad (6)$$

или эквивалентное ему равенство

$$R^*(\omega, \omega_1) = -1. \quad (6')$$

Доказательство теоремы Чевы

Необходимость. Пусть прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Докажем, что выполняются условия (5) и (5').

Заметим, что если прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то либо все три точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника ABC , либо же одна из точек лежит на стороне треугольника, а две другие – на продолжениях соответствующих сторон. В первом случае все дроби, входящие в выражение $R(\Delta, \Delta_1)$, положительны, а во втором случае одна из трех дробей, входящих в $R(\Delta, \Delta_1)$, положительна, а две другие – отрицательны, так что снова выражение $R(\Delta, \Delta_1)$ (а следовательно, и $R^*(\omega, \omega_1)$ – см. лемму) больше нуля. Докажем теперь, что $|R^*(\omega, \omega_1)| = 1$ (так как $R^*(\omega, \omega_1) > 0$, из этого будет следо-

² Выражение $R^*(\omega_1, \omega)$ получается из выражения $R^*(\omega, \omega_1)$ взаимной заменой векторов \vec{a} и \vec{a}_1 , \vec{b} и \vec{b}_1 , \vec{c} и \vec{c}_1 .

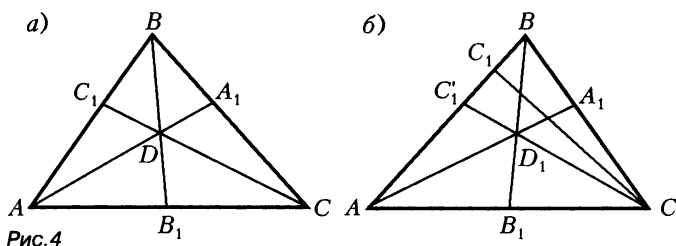


Рис.4

вать, что $R^*(\omega, \omega_1)$ равно единице). Обозначим точку пересечения прямых AA_1 , BB_1 и CC_1 через D (рис.4,а). Применяя теорему синусов, получим

$$\frac{|\sin \angle(\vec{b}, \vec{c}_1)|}{|\sin \angle(\vec{b}, \vec{a}_1)|} = \frac{DA}{DC},$$

$$\frac{|\sin \angle(\vec{c}, \vec{a}_1)|}{|\sin \angle(\vec{c}, \vec{b}_1)|} = \frac{DB}{DA},$$

$$\frac{|\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}_1)|}{|\sin \angle(\vec{a}, \vec{c}_1)|} = \frac{DC}{DB}.$$

Перемножая эти равенства, видим, что $|R^*(\omega, \omega_1)| = 1$. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Доказательство достаточности проведем методом «от противного». Допустим, что $R(\Delta, \Delta_1) (= R(\omega, \omega_1)) = 1$, но прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 не проходят через одну точку (рис.4,б). Обозначим точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 через D_1 , а через C_1 – точку пересечения прямых AB и CD_1 . Поскольку прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке,

$$\left\{ \frac{\overline{AC'_1}}{\overline{C'_1B}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \right\} = 1.$$

Но по условию

$$\left\{ \frac{\overline{AC'_1}}{\overline{CB'_1}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \right\} = 1,$$

откуда $\left\{ \frac{\overline{AC'_1}}{\overline{C'_1B}} \right\} = \left\{ \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \right\}$. Так как и точка C_1 и точка C'_1 лежат на

прямой AB , из этого следует, что точки C_1 и C'_1 совпадают. Теорема Чебы доказана.

Доказательство теоремы Менелая

Необходимость. Известно, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Нужно доказать равенства (6) и (6').

Снова заметим, что если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то либо все они находятся на продолжениях BC, AC и AB сторон треугольника ABC , либо же две из точек A_1, B_1, C_1 находятся на соответствующих им сторонах, а третья — на продолжении. В обоих случаях выражение $R(\Delta, \Delta_1)$ будет отрицательным (убедитесь в этом). Докажем теперь, что если точки A_1, B_1, C_1 — на одной прямой, то $|R(\Delta, \Delta_1)| = 1$ (поскольку $R(\Delta, \Delta_1) < 0$, из этого будет следовать, что $R(\Delta, \Delta_1) = -1$).

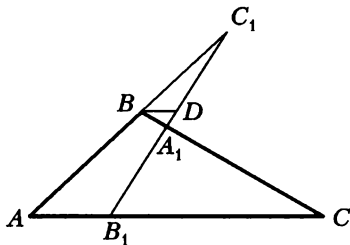


Рис.5

Проведем через точку B прямую, параллельную AC , и обозначим точку ее пересечения с прямой $B_1A_1C_1$ через D (рис.5).

Используя подобие, легко получим

$$\left\{ \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \right\} = \frac{B_1C}{BD}, \quad \left\{ \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} \right\} = \frac{BD}{AB_1}.$$

Добавив очевидное равенство $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{AB_1}{B_1C}$ и перемножив все три равенства, получим, что $|R(\Delta, \Delta_1)| = 1$. Необходимость условий теоремы Менелая доказана. Доказательство достаточности условий (6) и (6') теоремы Менелая проводится аналогично доказательству достаточности условий (5) и (5') теоремы Чебы.

Несколько следствий

Введение в формулировки теорем Чебы и Менелая двух эквивалентных условий (5) и (5'), (6) и (6') сделано не только для облегчения доказательства этих теорем. В одних задачах оказывается удобным использовать одно из условий, в других — другое. Убедитесь в этом, попробовав самостоятельно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. Если три прямые, проходящие через вершины треугольника, пересекаются в одной точке, то и прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис треугольника, также пересекаются в одной точке. Если же эти три прямые пересекают противоположные стороны треугольника в трех точках, расположенных на одной прямой, то и прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис, также пересекают противоположные стороны треугольника в трех точках, расположенных на одной прямой.

Если мы вспомним про равенство (4), то легко докажем

Утверждение 2. Если три прямые, проходящие через вершины A , B и C треугольника ABC параллельно сторонам B_1C_1 , A_1C_1 и A_1B_1 треугольни-

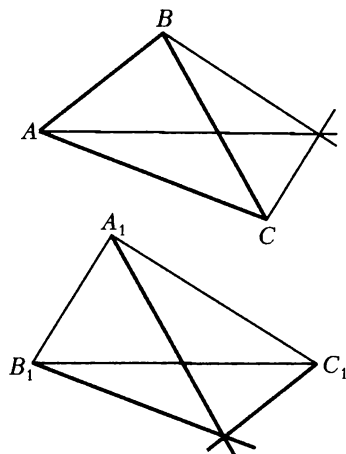


Рис.6

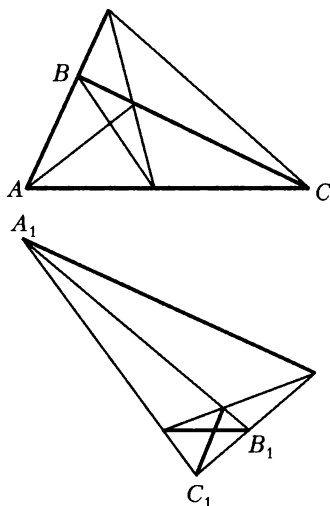


Рис.7

ка $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке, то и прямые, проходящие через вершины A_1 , B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно сторонам BC , AC и AB треугольника ABC , также пересекаются в одной точке. Если же первые три прямые пересекают соответствующие стороны треугольника ABC в трех точках, расположенных на одной прямой, то то же самое имеет место и для прямых, проходящих через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно BC , AC и AB (рис.6, 7).

Докажит^е самостоятельно также

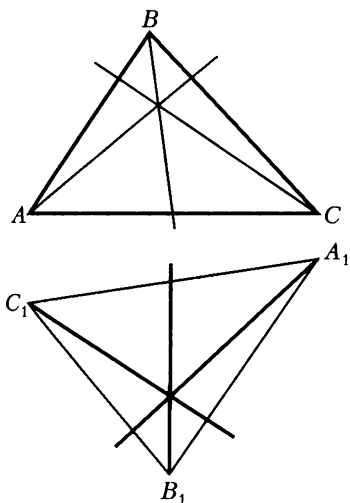


Рис.8

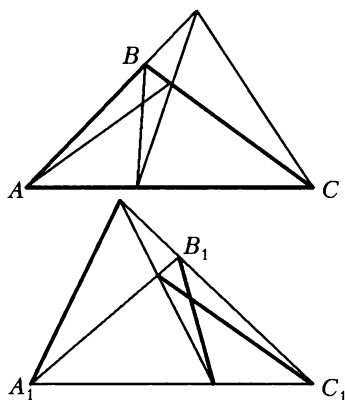


Рис.9

Утверждение 3. Если прямые, проходящие через вершины A , B и C треугольника ABC перпендикулярно сторонам B_1C_1 , A_1C_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенным из вершин A_1 , B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ на прямые BC , AC и AB , также пересекаются в одной точке. Если же первая тройка прямых пересекает соответствующие стороны треугольника ABC в трех точках, расположенных на одной прямой, то и прямые, проходящие через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярно сторонам треугольника ABC , пересекают соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$ в трех точках, расположенных на одной прямой (рис.8, 9).

Приведем еще два примера использования теорем Чебы и Менелая.

Утверждение 4 (теорема Паскаля). Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 – точки, расположенные на одной окружности. Тогда точки пересечения прямых A_1A_2 и A_4A_5 , A_2A_3 и A_5A_6 , A_3A_4 и A_6A_1 лежат на одной прямой.

Доказательство. Обозначим точки пересечения прямых, о которых говорится в условии, буквами K, L и M соответственно. Будем считать, что прямые A_1A_2 , A_3A_4 и A_5A_6 не пересекаются в одной точке; тогда они образуют треугольник – обозначим его ABC , где A – точка пересечения прямых A_1A_2 и A_5A_6 , B – прямых A_1A_2 и A_4A_3 и, наконец, C – прямых A_3A_4 и A_5A_6 .

Составим следующую таблицу:

A	K	A_1	A_2	B
B	A_4	M	A_3	C
C	A_5	A_6	L	A

Буквы, стоящие в каждой строке и каждом столбце этой таблицы, соответствуют точкам, расположенным на одной прямой.

Поскольку точки K , A_4 и A_5 лежат на одной прямой и на сторонах AB , BC и CA треугольника ABC , должно выполняться условие (6), а именно:

$$\left\{ \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{BA_4}}{\overline{A_4C}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{CA_5}}{\overline{A_5A}} \right\} = -1. \quad (7)$$

Аналогично

$$\left\{ \frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{CA_6}}{\overline{A_6A}} \right\} = -1, \quad (8)$$

$$\left\{ \frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_2B}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{BA_3}}{\overline{A_3C}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} \right\} = -1. \quad (9)$$

Поскольку точки A_1 , A_2 , A_5 и A_6 лежат на одной окружности и точка A – точка пересечения прямых A_1A_2 и A_5A_6 , то $\overline{AA_1} \cdot \overline{AA_2} = \overline{AA_5} \cdot \overline{AA_6}$. Определим для коллинеарных векторов $\overline{AA_i}$ и $\overline{AA_j}$ величину $\{\overline{AA_i} \cdot \overline{AA_j}\}$, равную произведению длин векторов $\overline{AA_i}$ и $\overline{AA_j}$, взятому со знаком «+», если векторы $\overline{AA_i}$ и $\overline{AA_j}$ сонаправлены, и со знаком «-», если они направлены противоположно. Тогда последнее равенство в новых обозначениях мы можем переписать так:

$$\{\overline{AA_1} \cdot \overline{AA_2}\} = \{\overline{AA_5} \cdot \overline{AA_6}\} = \{\overline{A_5A} \cdot \overline{A_6A}\}. \quad (10)$$

Аналогично

$$\{\overline{BA_4} \cdot \overline{BA_3}\} = \{\overline{A_1B} \cdot \overline{A_2B}\}, \quad (11)$$

$$\{\overline{CA_5} \cdot \overline{CA_6}\} = \{\overline{A_4C} \cdot \overline{A_3C}\}. \quad (12)$$

Перемножая равенства (7)–(9) с учетом равенств (10)–(12) и того, что, согласно определению, например, $\left\{ \frac{\overline{BA_4}}{\overline{A_4C}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{BA_3}}{\overline{A_3C}} \right\} = \left\{ \frac{\overline{BA_4} \cdot \overline{BA_3}}{\overline{A_4C} \cdot \overline{A_3C}} \right\}$, получаем $\left\{ \frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} \right\} = -1$, что по теореме Менелая и означает принадлежность точек K , L и M одной прямой.

Случай, когда прямые A_1A_2 , A_3A_4 и A_5A_6 пересекаются в одной точке (и тем самым не образуют треугольника ABC), разберите самостоятельно.

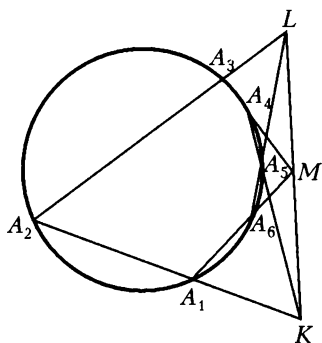


Рис. 10

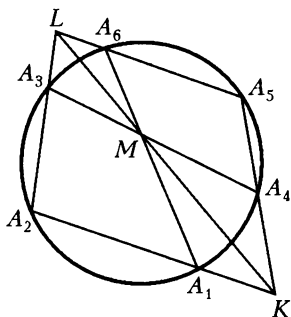


Рис. 11

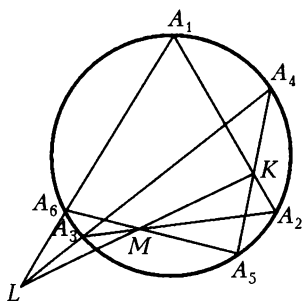


Рис. 12

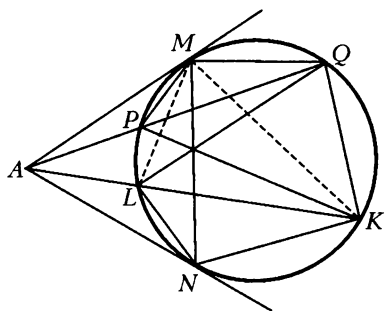


Рис. 13

На рисунках 10–12 изображены три различных случая расположения точек A_1, \dots, A_6 . Ими, конечно, не исчерпываются все возможности.

И в заключение – еще одно следствие.

Утверждение 5. Пусть из точки A , взятой вне окружности, проведены две касательные AM и AN к окружности и две секущие, и пусть P и Q – точки пересечения окружности с первой секущей, а точки K и L – со второй. Тогда прямые PK , QL и MN пересекаются в одной точке.

Доказательство (рис. 13). Применим теорему Чевы к треугольнику KLM . Заметим, что прямые PK , QL и MN пересекутся в одной точке, если выполняется равенство

$$\frac{\sin \angle LMN}{\sin \angle NML} \cdot \frac{\sin \angle KLQ}{\sin \angle QLM} \cdot \frac{\sin \angle MKP}{\sin \angle PKL} = 1. \quad (13)$$

Все углы, фигурирующие в последнем выражении, – вписанные в данную окружность; синусы этих углов пропорциональны длинам

стягиваемых ими хорд (так, например, $\sin \angle LMN = \frac{LN}{2R}$, где R – радиус окружности). Поэтому равенство (13) эквивалентно такому равенству:

$$\frac{LN}{NK} \cdot \frac{KQ}{QM} \cdot \frac{MP}{PL} = 1. \quad (13')$$

Покажем, что (13') в самом деле выполняется. Из подобия треугольников AMP и AMQ получаем $\frac{PM}{MQ} = \frac{AM}{AQ}$. Из подобия треугольни-

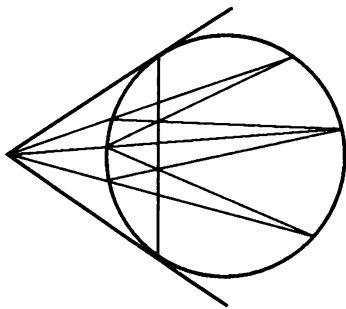


Рис. 14

ков APL и AQK имеем $\frac{KQ}{PL} = \frac{QA}{AL}$,

и наконец, из подобия треугольников ALN и ANK имеем $\frac{LN}{NK} = \frac{AL}{AM}$.

Перемножая последние три равенства, получаем (13).

Замечание. Из утверждения 5 следует, что с помощью одной линейки через данную точку вне окружности можно провести касательную. Способ построения показан на рисунке 14.

Упражнения

1. Докажите, что: а) биссектрисы внешних углов треугольника пересекают прямые, на которых лежат противоположные стороны, в трех точках, расположенных на одной прямой; б) касательные к окружности, описанной около треугольника, проведенные в вершинах треугольника, пересекают прямые, на которых лежат противоположные стороны треугольника, в трех точках, принадлежащих одной прямой.

2. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 так, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что если $\angle CA_1B_1 = 90^\circ$, то A_1B_1 – биссектриса угла AA_1C .

3. Докажите, что перпендикуляры, восстановленные к биссектрисам треугольника в их серединах, пересекают стороны треугольника (или продолжения сторон), на которые опущены соответствующие этим перпендикулярам биссектрисы, в трех точках, лежащих на одной прямой.

4. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1 и C_2 , сторону BC – в точках A_1 и A_2 , сторону CA – в точках B_1 и B_2 . Докажите, что если прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 также пересекаются в одной точке.

5. Даны три непересекающиеся окружности. Для каждой пары окружностей определена точка пересечения общих внешних и точка пересечения общих внутренних касательных. Докажите, что получившиеся шесть точек расположены на трех прямых, по три точки на каждой.

6. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 . Пусть C_2 – точка пересечения прямых AB и A_1B_1 , A_2 – точка пересечения прямых BC и B_1C_1 , B_2 – точка пересечения прямых AC и A_1C_1 . Докажите, что если прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке, то точки A_2 , B_2 , C_2 лежат на одной прямой.

7. Прямая пересекает стороны AB , BC и продолжение стороны AC треугольника ABC в точках D , E и F . Докажите, что середины отрезков DC , AE и BF лежат на одной прямой.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle ADB = 26^\circ$, $\angle BCD = 51^\circ$, $\angle BCA = 13^\circ$, $\angle ACD = 73^\circ$. Найдите $\angle ABD$.

9. На стороне AC треугольника ABC взята точка K , а на медиане BD – точка P так, что площадь треугольника BPC равна площади треугольника APK . Определите геометрическое место точек пересечения прямых AP и BK .

10. Дан треугольник ABC . Определим точки A_1 , B_1 и C_1 следующим образом. Точка A_1 – это середина хорды, отсекаемой на стороне BC окружностью, касающейся сторон BA и CA треугольника ABC . Аналогично, B_1 – середина хорды, отсекаемой на стороне AC окружностью, касающейся сторон AB и CB , а C_1 – середина хорды, отсекаемой на стороне AB окружностью, касающейся сторон AC и BC . Дугам всех трех окружностей, находящимся внутри треугольника, соответствуют равные центральные углы. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.

11. На ребрах AB , BC , CD и DA тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки K , L , M , N . Докажите, что для того чтобы фигура $KLMN$ являлась плоским четырехугольником, необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$AK \cdot BL \cdot CM \cdot DM = KB \cdot LC \cdot MD \cdot NA.$$

12. Через вершины A и B четырехугольника $ABCD$ проведена окружность. Прямые AD и BC вторично пересекают окружность в точках K и L , а прямые AC и BD – в точках M и N . Докажите, что прямые KL , MN и CD пересекаются в одной точке или параллельны.

ВОКРУГ БИСSEКТРИСЫ

В этой статье собраны некоторые геометрические факты, прямо или косвенно связанные с биссектрисой треугольника. Среди них читатель найдет и несложные, но часто используемые «леммы», и более солидные и трудные «теоремы», и просто красивые «задачи». Но мы не станем их никак классифицировать, а просто будем нумеровать в порядке появления в статье. Утверждения, которые приводятся в статье без доказательства, автоматически включаются в число упражнений. Впрочем, и имеющиеся в статье доказательства мы постарались изложить по возможности лаконично, чтобы оставить читателям простор для размышлений.

Это должен знать каждый

Напомним прежде всего некоторые общепринятые обозначения: ABC – данный треугольник, S_{ABC} – его площадь, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $2p = a + b + c$, O и R – соответственно, центр описанной окружности и ее радиус, I и r – центр и радиус вписанной окружности. Кроме того, треугольник имеет три внеписанные окружности, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Их центры и радиусы будем обозначать, соответственно, $I_a, I_b, I_c, r_a, r_b, r_c$ (I_a – центр внеписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC , r_a – ее радиус).

Все другие обозначения будут разъясняться в соответствующих местах.

(1) Пусть биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке A_1 . Тогда

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b}.$$

(2) Пусть биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает прямую BC в точке A_2 . Тогда

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b}.$$

$$(3) S_{ABC} = pr.$$

$$(4) S_{ABC} = (p - a)r_a.$$

(5) Если M – точка касания вписанной окружности со стороной AB , то $AM = p - a$. (Аналогично определяются и другие отрезки, на которые стороны треугольника делятся точками касания со вписанной окружностью.)

(6) Если M – точка касания внеписанной окружности с центром I_a с прямой AB , то $AM = p$.

(7) Вершины B и C лежат на окружности с диаметром II_a ; центр L этой окружности лежит на описанной окружности (рис.1).

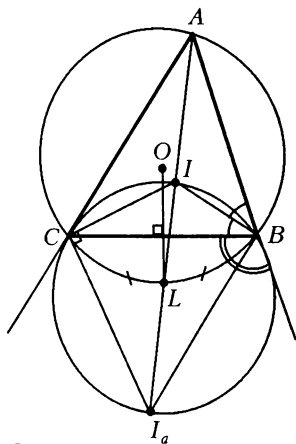


Рис.1

Таким образом, центр вписанной окружности I обладает следующим свойством: прямые AI , BI и CI (т.е. биссектрисы) проходят через центры описанных окружностей треугольников BIC , CIA , AIB соответственно. Верна и обратная теорема.

(8) Если прямые AM , BM и CM проходят через центры описанных окружностей треугольников BMC , CMA и AMB , то M – центр вписанной окружности треугольника ABC .

В самом деле, пусть M_a , M_b , M_c – точки пересечения прямых AM , BM и CM с соответствующими окружностями, отличные от M (рис.2). Тогда MM_a , MM_b и MM_c – диаметры этих окружностей, поэтому M_aA , M_bB и M_cC – высоты треугольника $M_aM_bM_c$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \angle BAM &= \angle BM_cM = \\ &= 90^\circ - \angle BM_aC = \\ &= \angle CM_bM = \angle CAM, \end{aligned}$$

т.е. M лежит на биссектрисе угла A и, аналогично, на биссектрисах углов B и C .

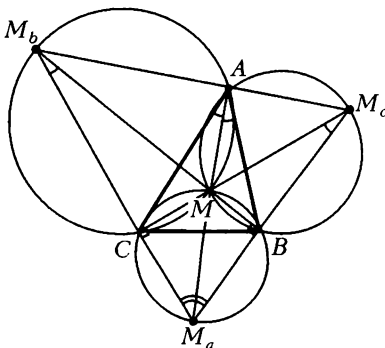


Рис.2

Расстояния между центрами «замечательных окружностей»

$$(9) OI^2 = R^2 - 2rR \text{ (формула Эйлера).}$$

$$(10) OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

$$(11) II_a^2 = 4R(r_a - r).$$

Для доказательства первых двух формул напомним, что если M и N – точки пересечения произвольной прямой, проходящей через данную точку P , с окружностью радиуса R с центром O , то $PM \cdot PN = |R^2 - OP^2|$. (Это вытекает из подобия треугольников PMM' и PNN' , где M' и N' – точки пересечения прямой OP с окружностью; рис.3, а и б.) Отсюда следует, что

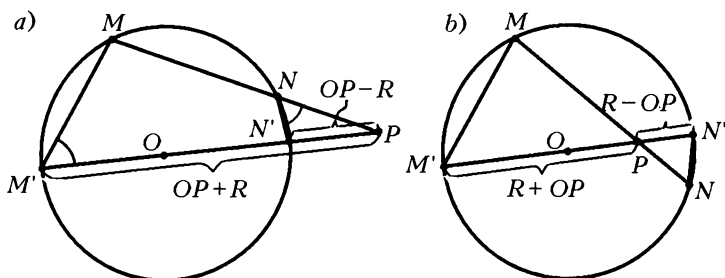


Рис.3

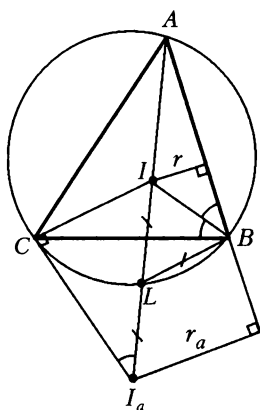


Рис.4

$R^2 - OI^2 = IA \cdot IL$, где L – точка пересечения биссектрисы угла A с описанной окружностью (рис.4). Но $IA = r/\sin(\angle A/2)$, а $IL = LB = 2R \sin(\angle A/2)$ по утверждению (7), поэтому $R^2 - OI^2 = 2Rr$. Аналогично,

$$\begin{aligned} OI_a^2 - R^2 &= I_a L \cdot I_a A = \\ &= 2R \sin(\angle A/2) \times r_a / \sin(\angle A/2) = 2Rr_a. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} II_a^2 &= (2IL) \cdot (I_a A - IA) = \\ &= 4R \sin \frac{\angle A}{2} \cdot \frac{r_a - r}{\sin \frac{\angle A}{2}} = 4R(r_a - r). \end{aligned}$$

(12) Точки, симметричные центрам вневписанных окружностей относительно центра описанной окружности, лежат на окружности радиуса $2R$ с центром I .

Два экстремальных свойства центра вписанной окружности

Возьмем внутри треугольника ABC произвольную точку M . Существует довольно много неравенств, касающихся расстояний от этой точки до вершин треугольника. Мы рассмотрим два таких неравенства, имеющих отношение к теме статьи.

(13) Обозначим через A_1 точку пересечения прямой AM с описанной окружностью. Тогда

$$\frac{BM \cdot CM}{A_1M} \geq 2r.$$

$$(14) \quad AM \sin \angle BMC + BM \sin \angle CMA + CM \sin \angle AMB \leq p.$$

В обоих случаях равенство достигается, если M совпадает с I – центром вписанной окружности.

Допустим, что наименьшее значение выражения $f(M) = \frac{BM \cdot CM}{A_1M}$, стоящего в левой части неравенства (13), достигается в некоторой точке M внутри треугольника ABC . Мы покажем, что $M = I$. А поскольку $f(I) = 2r$ (это следует, например, из подобия прямоугольных треугольников BDI и I_aIC на рисунке 4), откуда будет вытекать, что если $f(M)$ принимает свое наименьшее значение внутри треугольника ABC , то $f(M) \geq 2r$. Выделенное предположение является не тривиальным и очень существенным. Мы обсудим его несколько позже.

Опишем около треугольника AMC окружность (рис.5). Все треугольники CMA_1 , получающиеся при перемещении точки M по ее дуге AC , подобны между собой (почему?), следовательно, отношение CM/A_1M будет для них одним и тем же. Поэтому, если M – точка минимума величины $f(M)$, прямая BM должна проходить через центр окружности, описанной около треугольника AMC , иначе мы могли бы уменьшить BM , оставляя постоянным отношение CM/A_1M . Пусть теперь B_1 и C_1 – точки пересечения прямых

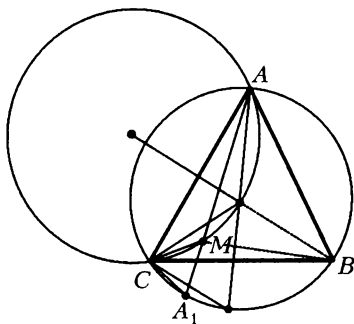


Рис.5

BM и CM с окружностью, описанной около треугольника ABC , тогда, как мы видели при доказательстве формулы (9),

$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1$ и потому

$$\frac{BM \cdot CM}{A_1M} = \frac{CM \cdot AM}{B_1M} = \frac{AM \cdot BM}{C_1M}.$$

Следовательно, прямые AM и CM также должны проходить через центры окружностей, описанных около треугольников BMC и AMB соответственно, и в силу (8) точка M – центр вписанной окружности треугольника ABC .

Вернемся к вопросу о достижении наименьшего значения функцией $f(M)$. В анализе доказывається, что непрерывная числовая функция, заданная на отрезке, обязательно принимает в некоторых его точках свое наибольшее и наименьшее значение. Аналогичная теорема верна и для функций нескольких переменных, например для функций на плоскости; в частности, функция, непрерывная на многоугольнике, всегда достигает на нем наибольшего и наименьшего значения. Однако к нашей задаче эта теорема непосредственно не применима – функция $f(M)$ не определена в вершинах треугольника ABC . Более того, ее даже невозможно доопределить в точках A, B, C так, чтобы она стала непрерывной на всем треугольнике (включая границу)! Но если отрезать от треугольника уголки, мы получим шестиугольник, на котором наша функция уже будет непрерывна и, следовательно, достигает наименьшего значения. Можно показать, что вблизи границы треугольника $f(M) > 2r$. Поэтому, если отрезаемые уголки достаточно малы, наименьшее значение $f(M)$ на шестиугольниках, а значит, и на треугольнике, достигается при $M = I$ и равно $2r$.

Рассмотренное доказательство неравенства (13) относят к *косвенным*, в отличие от так называемых *прямых*, когда непосредственно доказывається, что (в нашем случае) $f(M) \geq f(I)$ для всех точек M внутри треугольника ABC . Косвенные доказательства нужно проводить с известной осторожностью, потому что наибольшее или наименьшее значение функции достигается отнюдь не всегда. За примером далеко ходить не надо: сама функция $f(M)$ *не принимает* своего наибольшего значения; читателю предлагается доказать, что $f(M) < l$, где l – длина наибольшей стороны треугольника, для всех точек M треугольника ABC (кроме, конечно, вершин), причем величина $f(M)$ может быть сколь угодно близка к l .

Перейдем к доказательству неравенства (14). Оно тоже будет косвенным: мы покажем, что точка максимума M левой части этого неравенства (если она существует!) совпадает с I .

Опишем около треугольника BMC окружность и продолжим отрезок AM до вторичного пересечения с ней в точке A_2 (рис.6). Применим к четырехугольнику $BMC A_2$ *теорему Птолемея* –

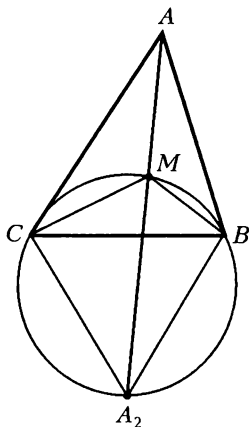


Рис.6

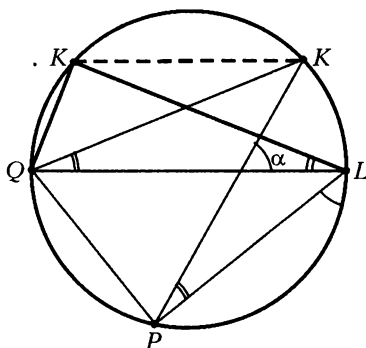


Рис.7

«сумма произведений противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника равна произведению его диагоналей»:

$$BM \cdot A_2C + CM \cdot A_2B = BC \cdot A_2M .$$

Эту теорему можно доказать, выражая двумя способами площадь четырехугольника: если $KLPQ$ – вписанный четырехугольник и хорда KK' параллельна диагонали LQ , то $S_{KLPQ} = S_{K'L'PQ}$ (рис.7). В то же время $2S_{KLPQ} = KP \cdot LQ \cdot \sin \alpha$, где α – угол между диагоналями KP и LQ , а

$$\begin{aligned} 2S_{K'LPQ} &= K'L \cdot LP \sin \angle K'LP + K'Q \cdot QP \sin \angle K'QP = \\ &= (KQ \cdot LP + KL \cdot QP) \sin \alpha , \end{aligned}$$

ибо $\angle K'LP = \alpha$ – см. рисунок 7.

Учитывая, что длины хорд одной окружности пропорциональны синусам опирающихся на них углов, получим

$$BM \sin \angle A_2MC + CM \sin \angle A_2MB = A_2M \sin \angle BMC ,$$

или

$$BM \sin \angle AMC + CM \sin \angle AMB = A_2M \sin \angle BMC .$$

Сопоставляя последнее равенство с неравенством (14), видим, что левая часть неравенства равна $AA_2 \sin \angle BMC$. Значит, прямая AM должна проходить через центр окружности, описанной около BMC , поскольку в противном случае, перемещая M по дуге BC , мы можем увеличить левую часть неравенства (14).

Дальнейшие рассуждения (в том числе и доказательство существования точки максимума) проводятся так же, как и в задаче (13). Докажите самостоятельно, что если M совпадает с I , то $AA_2 \sin \angle BMC = p$. Для этого можно воспользоваться, например, задачами (6) и (7) и тем, что $\angle BIC = 90^\circ + \angle A/2$.

Когда подводит интуиция

Если у треугольника равны два «однотипных» элемента (например, два угла или две медианы и т.п.), то естественно ожидать, что он будет равнобедренным. Среди задач на доказательство утверждений такого рода издавна одной из самых трудных считается так называемая задача Штейнера–Лемуса.

(15) Доказать, что если в треугольнике равны две биссектрисы, то треугольник равнобедренный.

Эта задача широко известна¹, а вот следующая забавная вариация на ту же тему почти неизвестна даже среди любителей геометрии.

(16) Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Можно ли утверждать, что и данный треугольник равнобедренный?

Оказывается, утверждать это, вообще говоря, нельзя! Более точно, пусть A_1, B_1, C_1 – основания биссектрис треугольника ABC . Если $A_1B_1 = A_1C_1$, а треугольник ABC – не равнобедренный, то его угол A тупой и $\cos \angle A$ лежит в интервале $\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$, что для самого угла A соответствует интервалу $(102^\circ 40'; 104^\circ 28')$ (значения в градусной мере приближенные).

Обратно, для любого угла α из этого интервала можно указать единственный (с точностью до подобия) неравнобедренный треугольник ABC с $\hat{A} = \alpha$, для которого $A_1B_1 = A_1C_1$. Подробное решение этой задачи дается в книге И.Ф.Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)» (М., Наука, 1982), с. 157. К сожалению, автор не сумел построить конкретный пример треугольника (т.е. точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством. Может быть, это удастся читателям?

¹ История этой задачи и одно из решений (возможно, самое короткое) приводятся, например, в книге Г.С.М.Коксетера и С.Л.Грейтцера «Новые встречи с геометрией» (М., Наука, 1978), гл.1, §5.

Еще 11 задач

(17) Докажите, что биссектриса треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из той же вершины.

(18) Пусть AA' – биссектриса треугольника ABC . Докажите равенства: $AA' = \sqrt{bc - BA' \cdot CA'} = \frac{2bc \cos(\angle A/2)}{b+c}$.

(19) Докажите, что высоты треугольника служат биссектрисами треугольника, образованного их основаниями.

(20) Пусть M и N – проекции точки пересечения высот треугольника ABC на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A этого треугольника. Докажите, что прямая MN делит сторону BC пополам.

(21) Докажите, что сумма площадей трех треугольников, вершинами каждого из которых являются три точки касания одной внеписанной окружности со сторонами или продолжениями сторон данного треугольника, равна удвоенной площади этого треугольника, сложенной с площадью треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности с его сторонами.

(22) Пусть AA' , BB' , CC' – биссектрисы треугольника ABC , L и K – точки пересечения прямых AA' и $B'C'$, CC' и $A'B'$ соответственно. Докажите, что BB' – биссектриса угла LBK .

(23) Пусть M и N – середины диагоналей AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если BD – биссектриса угла ANC , то AC – биссектриса угла BMD .

(24) В треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает прямую, проходящую через середину AC и середину высоты, опущенной на AC , в точке M , N – середина биссектрисы угла B . Докажите, что биссектриса угла C является также и биссектрисой угла MCN .

(25) Через основания биссектрис треугольника ABC проведена окружность. Рассмотрим три хорды, образованные при пересечении сторон треугольника с этой окружностью. Докажите, что длина одной из этих хорд равна сумме длин двух других.

(26) В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K , так, что $AK = KL = LC$. Через точку пересечения прямых AL и CK проведена прямая, параллельная биссектрисе угла B , пересекающая прямую AB в точке M . Докажите, что $AM = BC$.

(27) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Противоположные стороны AB и CD при продолжении пересекаются в точке K и L , стороны BC и AD – в точке L . Докажите, что биссектрисы углов BKC и BLA перпендикулярны и пересекаются на прямой, соединяющей середины AC и BD .

УЗНАЙТЕ ТОЧКУ

В геометрии очень важны свойства фигур, однозначно их описывающие или относящие к вполне определенному классу фигур, – так называемые «признаки». Вы знакомы, например, с целым рядом признаков параллелограмма и без труда узнаете его в четырехугольнике с попарно равными противоположными сторонами или с диагоналями, делящимися пополам их точкой пересечения, и т.д. Существуют и другие, более «хитрые», признаки параллелограмма. Известно, например, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон. Оказывается, верно и обратное утверждение: если в четырехугольнике сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Упражнение 1. Докажите это самостоятельно. (Указание. Из прямой теоремы получите формулу, выражающую квадрат медианы треугольника через квадраты его сторон. Пользуясь этой формулой, выразите квадрат расстояния между серединами диагоналей четырехугольника через квадраты его сторон и диагоналей.)

В этой статье мы немного поговорим о «признаках точки». В школьном курсе изучается несколько «замечательных» точек треугольника. Это точки обладают целым рядом интересных свойств, большинство из которых эту точку однозначно определяют. Однако часто мы с трудом «узнаем» точку, даже если указаны хорошо известные ее свойства.

Точка пересечения медиан (центроид)

Некоторые характерные свойства «замечательной» точки могут быть использованы не только для «узнавания» ее, но и для доказательства ее существования.

Многие школьники знают о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, хотя не все умеют это доказывать.

С другой стороны, нетрудно доказать, что внутри любого треугольника ABC существует точка M такая, что треугольники ABM , BCM и CAM равновелики (рис. 1). Самое лучшее – просто построить эту точку. Поскольку площадь треугольника ABM составляет $1/3$ площади треугольника ABC , точка M расположена на прямой, параллельной AB и удаленной от AB на расстояние, равное $1/3$ соответствующей высоты. Точно так же, M должна быть расположена на аналогичной прямой, параллельной BC , т.е. M – точка пересечения этих двух прямых. Поскольку площади треугольников ABM и BCM равны $1/3$ площади треугольника ABC , площадь треугольника CAM также равна $1/3$ площади ABC .

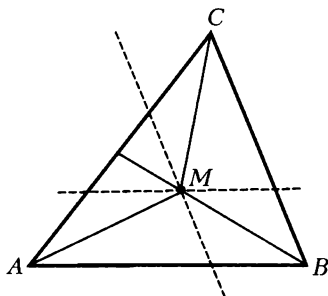


Рис. 1

Теперь докажем, что через точку M проходят все медианы данного треугольника и делятся в ней в отношении $2:1$, считая от вершин треугольника. В самом деле, из равновеликости треугольников ABM и BCM следует, что точки A и C равноудалены от прямой BM , а значит, эта прямая должна проходить через середину отрезка BC (эта прямая не может быть параллельной BC). А из того, что площадь треугольника CAM составляет $1/3$ площади ABC , следует, что расстояние от M до CA вдвое меньше расстояния от B до CA , а значит, M делит медиану BB_1 в отношении $BM : B_1M = 2$. Таким образом, медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в указанном отношении. Итак, мы получили признак центроида:

Признак M_1 . Внутренняя точка M треугольника ABC является центроидом тогда и только тогда, когда треугольники ABM , BCM и CAM равновелики.

Докажем еще два признака центроида.

Для того чтобы точка M являлась центроидом треугольника ABC необходимо и достаточно каждое из следующих условий.

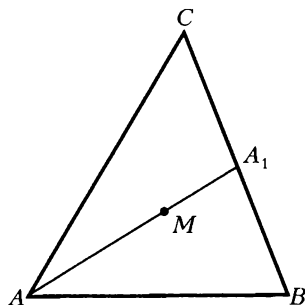


Рис. 2

Признак M_2 . $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$.

Признак M_3 . $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Доказательство. Начнем с M_2 . Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC (рис.2).

Имеем

$$\begin{aligned}\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} &= \overline{MA} + (\overline{MA_1} + \overline{A_1B}) + (\overline{MA_1} + \overline{A_1C}) = \\ &= (\overline{MA} + 2\overline{MA_1}) + (\overline{A_1B} + \overline{A_1C}) = \vec{0}.\end{aligned}$$

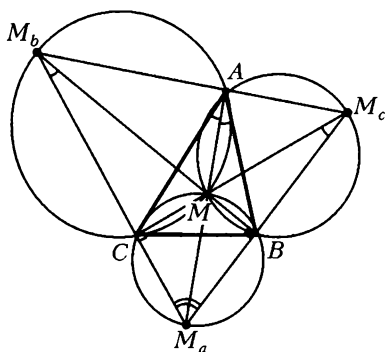


Рис.12

Обратно, пусть для точки M выполняется признак M_2 и A_1 – точка пересечения MA с BC . (Докажите, что прямая MA не может быть параллельной BC .) Тогда, как и выше, будем иметь

$$\begin{aligned}\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} &= \\ &= (\overline{MA} + 2\overline{MA_1}) + \\ &\quad + (\overline{A_1B} + \overline{A_1C}) = \vec{0}.\end{aligned}$$

Но сумма двух неколлинеарных векторов, записанных в скобках, может равняться нулю только при условии, что каждый вектор равен нулю. Следовательно, A_1 – середина BC .

Докажем теперь, что признак M_3 эквивалентен признаку M_2 . Пусть M – произвольная точка плоскости. Прежде всего, заметим, что из равенства $\overline{MA} - \overline{MB} = \overline{BA}$ после возведения его в квадрат, получим $2\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MA^2 + MB^2 - AB^2$. Аналогичные равенства верны для $2\overline{MB} \cdot \overline{MC}$ и $2\overline{MC} \cdot \overline{MA}$. Далее,

$$\begin{aligned}0 &\leq (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})^2 = \\ &= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overline{MA} \cdot \overline{MB} + 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} + 2\overline{MC} \cdot \overline{MA} = \\ &= 3(MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2).\end{aligned}$$

Таким образом, из равенства 2 следует равенство 3, и наоборот. Попутно мы доказали, что $MA^2 + MB^2 + MC^2$ достигает наименьшего значения, если M – центр тяжести (и это тоже является признаком центра тяжести).

В качестве иллюстрации решим следующую задачу.

Задача 1. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника с вершинами в центрах квадратов совпадает с точкой пересечения медиан данного треугольника.

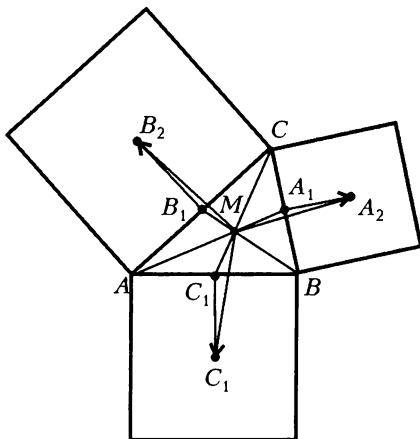


Рис.3

Решение. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC , A_1 – середина BC , A_2 – центр квадрата, построенного на BC (рис.3). Тогда $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}$. Имеем

$$\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_2} = (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}) + (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}).$$

Но сумма векторов в каждой из скобок равна нулю. В первой – по признаку M_2 . Во второй – потому, что каждый из векторов этой суммы получается соответственно из $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ поворотом на 90° по часовой стрелке. Значит, M – центроид треугольника $A_2B_2C_2$.

Центр описанной окружности

На этот раз мы не станем дополнять школьную теорию, а рассмотрим два примера.

Задача 2. В треугольнике ABC известны углы: $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Внутри треугольника взята точка K такая, что BCK – правильный треугольник. Найдите $\angle KAC$.

Решение. Эта задача предлагалась на районном туре Московской олимпиады 1989 года в 10 классе. Большинство участников олимпиады пытались решить ее «счетом» при помощи теоремы синусов, не увидев, что точка K – центр описанной около ABC окружности. В самом деле, из центра описанной около ABC окружности сторона BC видна под углом $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, расположен этот центр внутри треугольника (треугольник – остроугольный) и лежит на серединном перпендикуляре к BC . Итак, K –

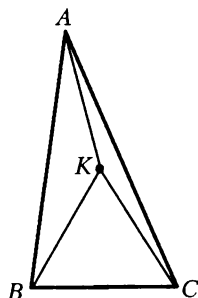


Рис. 4

центр описанной окружности (рис. 4), $\angle CKA = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ$, $\angle KAC = \angle KCA = 10^\circ$.

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 25^\circ$, $\angle BCA = 20^\circ$, $\angle BDC = 50^\circ$, $\angle BDA = 40^\circ$. Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника.

Решение. Можно провести косвенное рассуждение, доказывающее, что точка D является центром описанной около ABC окружности. Поскольку треугольник ABC – тупоугольный, центр описанной окружности расположен по другую сторону от AC , чем вершина A , причем из этого центра стороны BC и BA видны соответственно под углами 50° и 40° . Кроме того, такая точка единственна (убедитесь в этом).

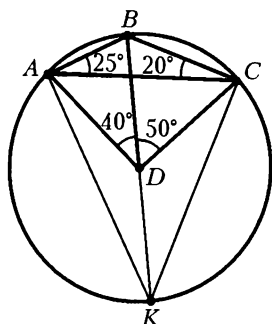


Рис. 5

Но в геометрии, как правило, «приятнее» выглядят прямые доказательства. Угадав роль точки D , легко найдем и соответствующее прямое рассуждение. Опишем около ABC окружность и продолжим BD до второго пересечения с этой окружностью (рис. 5). В треугольнике DKA имеем $\angle DKA = \angle BCA = 20^\circ$, а внешний угол при вершине D равен 40° . Следовательно, $\angle DAK = 20^\circ$ и $DK = DA$. Аналогично, $DK = DC$, и D – центр описанной около DKA , а значит, и ABC , окружности. Угол между диагоналями равен 85° .

Центр вписанной окружности

Пусть I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Укажем сначала на два свойства этого центра, с помощью которых можно получать различные признаки центра вписанной окружности.

Свойство 1. $\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B$.

Свойство 2. Прямая BI проходит через центр окружности, описанной около треугольника AIC .

Исходя из этих свойств, можно получить следующие признаки.

Признак I_1 . Если M – точка внутри треугольника ABC ,

причем $\angle BMC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ и прямая AM проходит через центр описанной около BMC окружности, то M – центр вписанной в ABC окружности.

Признак I_2 . Если M – точка внутри треугольника ABC и прямая AM проходит через центр описанной около BMC окружности, а прямая BM проходит через центр описанной около AMC окружности, то M – центр вписанной в ABC окружности.

Ограничимся доказательством признака I_2 . Обозначим через K и P вторые точки пересечения с описанной около ABC окружностью прямых AM и BM (рис.6). Из того, что прямая AM содержит центр описанной около MCB окружности, следует равенство $\angle KMB = 90^\circ - \angle MCB$. (Где-то на луче MK расположена точка, равноудаленная от M и B , из которой отрезок BM виден под углом $2\angle MCB$.) Точно так же $\angle PMA = 90^\circ - \angle MCA$. Из равенства углов KMB и PMA следует, что MC – биссектриса угла C . Значит,

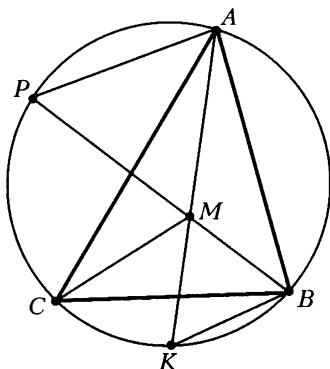


Рис.6

$$\begin{aligned}\angle KMB &= 90^\circ - \angle MCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MKB = \frac{1}{2}(\angle KMB + \angle KBM),\end{aligned}$$

т.е. $\angle KMB = \angle KBM$ и $KM = KB$. Теперь нетрудно сделать вывод, что K – центр описанной около BMC окружности, $CK = KB$ и AK – биссектриса угла A и т. д.

Упражнение 2. Докажите самостоятельно свойства 1, 2 и признак I_1 .

В некоторых задачах оказывается полезным следующий признак центра вписанной окружности, обобщающийся на трехмерное (и более) пространство.

Признак I_3 . $a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \vec{0}$, где a, b и c – соответственно длины сторон BC, CA и AB .

Доказательство. Пусть I – центр вписанной окружности, AI

пересекает BC в точке A_1 . Имеем

$$\begin{aligned} a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} &= a\overline{IA} + b(\overline{IA_1} + \overline{A_1B}) + c(\overline{IA_1} + \overline{A_1C}) = \\ &= (a\overline{IA} + b\overline{IA_1} + c\overline{IA_1}) + (b\overline{A_1B} + c\overline{A_1C}) = k\overline{IA}. \end{aligned}$$

(В последнем равенстве мы воспользовались свойством биссектрисы $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}$. Если вы не знакомы с этой теоремой, докажите ее самостоятельно.) Таким образом, рассматриваемая сумма векторов коллинеарна прямой A_1 . Аналогично доказывается, что она коллинеарна BI и CI и, следовательно, равна нулю.

Упражнение 3. Докажите самостоятельно, что если выполняется признак I_3 , I – центр вписанной окружности.

Точка пересечения высот (ортоцентр)

Известно много различных доказательств теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Мы приведем доказательство, основанное на одной общей идее, уже знакомой вам по доказательству теорем о том, что биссектрисы треугольника, а также серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке.

Рассмотрим для удобства остроугольный треугольник ABC . Заметим, что для всех точек высоты AA_1 отношение расстояний до сторон AB и AC постоянно и равно $\frac{\cos B}{\cos C}$. (Прямая AA_1 есть геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до прямых AB и AC равно $\frac{\cos B}{\cos C}$.) То же справедливо и для двух других высот. Обозначим через H точку пересечения высот AA_1 и BB_1 (рис.7). Зная отношение расстояний от H до AB и AC $\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)$ и отношение от H до BA и BC $\left(\frac{\cos A}{\cos C}\right)$, найдем, что отношение расстояний от H до CA и CB равно $\frac{\cos A}{\cos B}$ и, следовательно, H принадлежит третьей высоте.

Случай тупоугольного треугольника сводится к рассмотренному, поскольку (см. рис.7) для треугольника ABH точка C является точкой пересечения высот, опущенных из вершин A и B .

При решении задач часто используется следующее свойство.

Свойство H_1 . Радиус окружности, проходящей через две вершины треугольника и точку пересечения его высот, равен радиусу описанной около треугольника окружности.

Иногда свойство H_1 удобнее формулировать несколько иначе.

Свойство H'_1 . Окружность, проходящая через две вершины треугольника и точку пересечения высот, симметрична окружности, описанной около треугольника относительно соответствующей стороны треугольника.

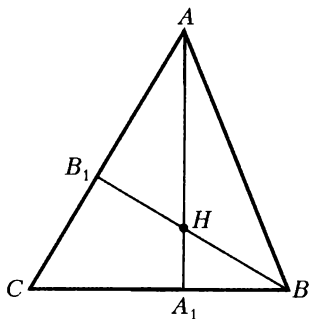


Рис.7

Упражнение 4. Докажите утверждения H_1 и H'_1 .

В заключение – одна несложная теорема.

Задача 4. На плоскости расположены три равные окружности, проходящие через одну точку. Докажите, что эта точка является ортоцентром треугольника с вершинами во вторых точках попарного пересечения данных окружностей.

Решение. Пусть H – общая точка трех окружностей, A , B и C – вторые точки их попарных пересечений (рис.8). Поскольку окружность, проходящая через B , C и H , симметрична окружности, описанной около ABH , она содержит точку пересечения высот треугольника ABH . Точно так же, окружность, проходящая через точки A , C , H , содержит точку пересечения высот треугольника ABH . Следовательно, C – точка пересечения высот треугольника ABH . Это значит, H – ортоцентр треугольника ABC .

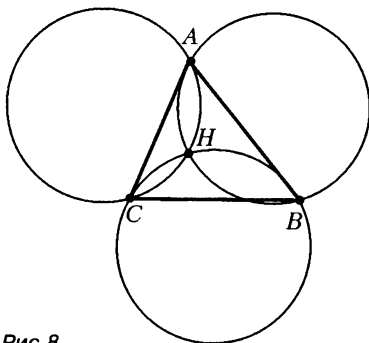


Рис.8

Упражнения

1. На плоскости даны точки A , B , C и D такие, что $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BCD = \angle BAD$. Обязательно ли четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом?

2. Дан треугольник ABC . Найдите все такие точки M плоскости, что ABM , BCM и CAM – равновеликие треугольники.

3. Докажите, что если отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 (A_1 , B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC , CA и AB треугольника ABC) пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в одном и том же отношении, то эти отрезки являются медианами треугольника.

4. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M такая, что $\angle MBD = \angle MDC = \alpha$. Найдите $\angle MAD$.

5. Докажите, что если произвольная прямая, проходящая через фиксированную точку внутри данного треугольника, делит его периметр и площадь в равном отношении, то данная фиксированная точка является центром вписанной в треугольник окружности.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известны углы: $\angle BCA = 40^\circ$, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle BDA = 20^\circ$, $\angle BDC = 25^\circ$. Найдите угол между диагоналями данного четырехугольника.

7. Пусть M – произвольная точка плоскости, a , b , c – стороны треугольника ABC ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$). Докажите, что имеет место неравенство $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \geq abc$. Для какой точки плоскости имеет место равенство?

8. Дан остроугольный треугольник ABC . Найдите геометрическое место точек M таких, что $\angle MAB = \angle MCB$, $\angle MAC = \angle MBC$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА КОНКУРСНОМ ЭКЗАМЕНЕ

— Это задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иском и игреком решить можно.

.....
— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая.

.....
-- Вот-с... по-нашему, по-неученому.

А.П.Чехов. Репетитор

Давным-давно, в доброе старое время, любили в школе текстовые арифметические задачи. Методам их решения, зачастую весьма изощренным, учили долго и тщательно, и умения эти сохранялись на всю жизнь. При этом школа не только учила методам, но и воспитывала вкус — арифметическое решение считалось более красивым, чем алгебраическое. Впрочем, и сегодня для любого мало-мальски математически воспитанного человека арифметические решения алгебраических задач, равно как и геометрические решения задач по геометрии, выглядят куда как привлекательнее алгебраических решений.

Здесь самое время вспомнить задачу, поставившую в тупик репетитора Егора Зиберова.

Задача 1. *«Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб?»*

По всей видимости, Удодов-старший решал ее следующим образом. 138 арш. черного сукна стоят $138 \cdot 3 = 414$ руб. Разница $540 - 414 = 126$ руб. получается за счет синего, каждый метр которого на 2 руб. дороже. Следовательно, синего сукна было $126:2 = 63$ арш., а черного — $138 - 63 = 75$ арш.

Интересно, что будет, если подобную задачу дать на конкурсном экзамене? Нет, мы не сомневаемся в том, что... впрочем, лучше сказать — мы надеемся на то, что подавляющее большин-

ство абитуриентов успешно справится с этой задачей. Но вряд ли найдется хотя бы одно решение, подобное приведенному. У некоторых даже возникнет вопрос: а разве так можно? Вся выучка выпускника восстает против таких решений. Лучше, во всяком случае, спокойнее решать эту задачу как обычно с «иксом» и «игреком».

Тем не менее изредка на конкурсных экзаменах встречаются текстовые задачи, предполагающие именно арифметические решения. Кроме того, бывают ситуации, когда здравые арифметические соображения могут существенно упростить процесс решения. О такого рода задачах мы и расскажем в этой статье.

Задача 2. *На реке расположены пункты А и В, причем В ниже по течению на расстоянии 20 км от А. Катер направляется из А в В, затем сразу возвращается в А и снова следует в В. Одновременно с катером из А отправился плот. При возвращении из В катер встретил плот в 4 км от А. На каком расстоянии от А катер нагонит плот, следуя вторично в В?*

Решение. Заметим, что катер удаляется от плота или приближается к нему с одной и той же скоростью – своей скоростью относительно воды. Следовательно, время, которое катер плыл от А до В, удаляясь от плота, равно времени, которое катер плыл от В до встречи с плотом. Значит, отношение путей, пройденных катером от А до В и от В до плота, равно отношению его скоростей по и против течения, т.е. отношению скоростей равно $20/16 = 5/4$. Таким же и по тем же соображениям будет отношение путей, пройденных катером от А до второй встречи с плотом и от первой встречи до А. Таким образом, катер нагонит плот в 5 км от А.

Задача 3. *На реке расположены пункты А и В. Одновременно из этих пунктов навстречу друг другу отходят два одинаковых катера, которые встречаются в некотором пункте, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Катер, вышедший из А, возвращается обратно через 1 ч после выхода. Если бы катер, отправляющийся из А, вышел на 15 мин раньше катера, отправляющегося из В, то встреча произошла бы на равном расстоянии от обоих пунктов. Через сколько времени возвращается обратно катер, выходящий из пункта В?*

Решение. Заметим, что момент возвращения катера в А полностью определяется лишь моментом выхода катера из В, равно как и возвращение катера в В определяется моментом выхода катера из А. Чтобы понять это, достаточно представить себе, что в точке встречи они не обмениваются почтой, а продолжают движение в противоположный пункт. Следовательно, во второй раз катер, вышедший из А, вернулся бы обратно

через 1 ч 15 мин после выхода, т.е. на полпути из A в B и обратно ему нужно 1 ч 15 мин, а на весь путь 2 ч 30 мин. Таким образом, катер, выходящий из B , возвращается обратно через 1 ч 30 мин.

Во многих сборниках конкурсных задач можно встретить следующую задачу.

Задача 4. Имеются два слитка с массами m кг и n кг с различным процентным содержанием меди. От каждого слитка отделяется кусок, причем эти куски имеют равную массу, и сплавляются с оставшейся частью другого слитка. Какой массы куски следует отрезать от каждого слитка, чтобы процентное содержание меди в новых слитках было бы равным?

Решение. Безусловно, эта задача легко решается стандартным образом при помощи уравнений. Правда, при этом надо не испугаться того, что число неизвестных (три) будет больше числа уравнений (одно). Как ни странно, более общим методом решения в данном случае будет арифметический. Более общим в том смысле, что он безболезненно проходит для любого числа слитков, в то время как алгебраический метод приводит к громоздким, трудно обозримым вычислениям.

На самом деле данная задача – обычная арифметическая задача «на части». В каждый из вновь образовавшихся слитков части исходных должны войти в отношении $m : n$. (Подумайте, почему?) Значит, в новом слитке массой в m кг содержится m равных частей из первого слитка (массой m кг) и n таких же частей из второго слитка. Масса одной части равна $\frac{m}{m+n}$ кг.

Остаток от первого слитка в этом новом слитке равен $\frac{m}{m+n}m = \frac{m^2}{m+n}$ кг, а отрезанная часть второго – $\frac{mn}{m+n}$ кг. Такую же часть надо отрезать от первого слитка.

Рассмотрим теперь несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в вузы.

Задача 5. Пятеро благородных рыбаков занимались ловлей рыбы. По окончании лова первому показалось, что он поймал больше остальных, и он разделил между ними поровну $1/3$ своей добычи. После этого стало ясно, что у второго оказалось больше рыбы, чем у остальных, и он разделил между всеми остальными поровну $1/3$ всей оказавшейся у него рыбы. Известно, что общий улов составляет 6 кг 400 г и что в результате описанных процедур он разделился поровну. Определите первоначальный улов каждого из рыбаков.

Решение. Данная задача – типичный пример арифметической задачи, решаемой с конца. В конце у каждого рыбака

оказалось по 1 кг 280 г рыбы. Значит, у второго рыбака, перед тем, как он делился с остальными, было в $3\frac{1}{2}$ раза больше рыбы, а именно – 1 кг 920 г. Значит, у каждого из четырех оставшихся рыбаков в это время было по 1 кг 280 г – $640 \text{ г} : 4 = 1 \text{ кг } 120 \text{ г}$. Рассуждая таким же образом, найдем, что улов первого рыбака равнялся 1 кг 680 г, второго – 1 кг 780 г, а у каждого из трех оставшихся – по 980 г.

Задача 6. В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму – 400 тонн, по третьему – 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определить, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.

Решение. Очевидно, что более производительный трубопровод следует подключить к танкеру с большей вместимостью. Поскольку один из двух танкеров был заполнен ровно за 12 часов, то либо меньший вмещает $12 \cdot 300 = 3600$ тонн нефти, либо больший $12 \cdot 400 = 4800$ тонн. Первый случай невозможен, так как при удвоении вместимости меньшего танкера получаем 7200 тонн, а для заполнения такого танкера даже третьим трубопроводом требуется более 14 часов. Следовательно, больший танкер вмещает 4800 тонн и заполняется вторым и, тем более, третьим трубопроводом быстрее, чем за 14 часов. Значит, меньший танкер вмещает $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 500 = 3500$ тонн.

Самое главное в этой задаче – не испугаться громоздкого условия, подойти к ней с позиции обычного здравого смысла. Минимальный здравый смысл и понимание, что такое «процент» – вот все необходимое для решения следующей задачи.

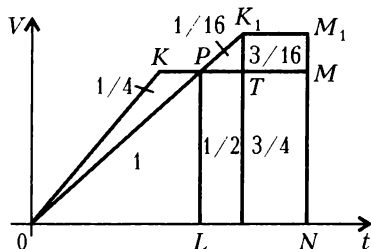
Задача 7. В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8 % до 97,2 %. Определите минимально возможное число членов такой группы.

Решение. Процент не участвовавших в кроссе заключен в пределах от 2,8 % до 3,2 %. Если бы в кроссе не участвовал 1 человек (меньше уже нельзя), то число членов группы заключалось бы в пределах от $1 \cdot \frac{100}{2,8} = 35,7\dots$ до $1 \cdot \frac{100}{3,2} = 31,2\dots$, т.е. минимальное число членов группы будет 32 человека. Понятно, что при меньшем числе членов группы 3,2 % от этого числа будет меньше 1, а по условию в кроссе не участвовал по крайней мере один человек.

Следующая задача не совсем соответствует теме статьи, поскольку при ее решении больше используются геометрические, чем арифметические методы. Мы включили ее по двум причинам. Во-первых, при ее решении не используются ни уравнения, ни другие соотношения, содержащие неизвестные. Во-вторых, иллюстрируется один весьма полезный метод решения задач на движение – графическая интерпретация.

Задача 8. Из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости, – равномерно. Отношения скоростей равномерного движения поездов равно 5/4. В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными, а один из них прошел к этому времени расстояние в 5/4 раза больше, чем другой. В пункты *B* и *A* поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому моменту, когда их скорости оказались равными?

Решение. Рассмотрим графики, изображающие зависимость скорости от времени для каждого поезда. При этом можно считать, что оба поезда вышли из одного пункта. Для одного поезда графиком является ломаная *ОКМ*, для другого – *ОК₁М₁* (см. рисунок). Длина пройденного пути к определенному моменту времени одним из поездов равна площади фигуры, ограниченной снизу отрезком оси *t* и соответствующей частью графика его скорости сверху. По условию площади трапеций *ОКМN* и *ОК₁М₁N* равны, значит, равновелики и фигуры *ОКР* и *РК₁М₁М*. Площадь *ОКPL* равна 5/4 площади *ОPL* (по условию). Если площадь *ОPL* равна 1, то пло-



щадь OKP есть $1/4$; площадь PK_1T равна $1/16$, поскольку $K_1T = \frac{1}{4}PL$ (по условию отношение скоростей равномерного движения равно $5/4$, т.е. $M_1N = \frac{5}{4}PL$), а треугольники OPL и PK_1T подобны. Далее из равновеликости OKP и PK_1M_1M находим площадь прямоугольника TK_1M_1M . Она равна $\frac{3}{16}$. Затем находим площади двух оставшихся прямоугольников. Весь путь (равен площади $OKMN$ или OK_1M_1N) равен $2\frac{1}{2}$. Поскольку площади трапеции $OKPL$ и треугольника OPL соответственно равны $\frac{5}{4}$ и 1, то в момент равенства скоростей (точка P) один поезд прошел $\frac{1}{2}$ пути, а другой — $\frac{2}{5}$.

И в заключение рассмотрим задачу, которая, по существу, является арифметической, поскольку решение основано на свойствах делимости натуральных чисел, хотя для удобства мы все же введем неизвестные. По содержанию эта задача скорее олимпиадная, чем конкурсная.

Задача 9. У восьми школьников в сумме имеется 7 руб. 19 коп. Известно, что у любых двух из них различные суммы денег, но у одного из них в целое число раз больше денег, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника?

Решение. Пусть x_1 — наименьшая сумма, x_1x_2 — вторая по величине, ..., $x_1x_2...x_8$ — наибольшая сумма. По условию $x_i \neq 1$ при $i > 1$, $x_1 + x_1x_2 + ... + x_1x_2...x_8 = 719$. 719 — число простое, следовательно, $x_1 = 1$. Далее имеем $x_2 + x_2x_3 + ... + x_2x_3...x_8 = 718 = 2 \cdot 359$. Таким образом, $x_2 = 2$. Затем получим $x_3 = x_4 = 2$ и $x_5 + x_5x_6 + x_5x_6x_7 + x_5x_6x_7x_8 = 88 \cdot x_5$ — делитель 88. Если $x_5 = 2$, то $x_6 + x_6x_7 + x_6x_7x_8 = 43$. 43 — число простое, а $x_6 \neq 1$, значит, $x_5 \neq 2$. При $x_5 = 4$ найдем $x_6 = 3$, $x_7 = x_8 = 2$. Другие значения x_5 не подойдут.

Итак, школьники имели соответственно 1, 2, 4, 8, 32, 96 коп., 1 руб. 92 коп., 3 руб. 84 коп.

Упражнения

1. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99 %. За время хранения его влажность уменьшилась на 1 % (стала 98 %). На сколько процентов уменьшилась масса хранившегося на базе крыжовника?

2. Автомобиль проезжает путь от A до B за 1 час. Автомобиль выехал из A и одно временно из B вышел пешеход. Автомобиль встретил

пешехода, довез его до A и затем прибыл в B , затратив на весь путь 2 ч 40 мин. За какое время может пройти весь путь от B до A пешеход?

3. Теплоход проходит путь от A до B по течению за 3 часа, а возвращается обратно за 4 часа. За какое время преодолеют путь от A до B плывущие со скоростью течения плоты?

4. Поезд, следующий из пункта A в пункт B , делает по пути несколько остановок. На первой остановке в поезд садится 5 пассажиров, а на каждой следующей – на 10 пассажиров больше. На каждой остановке 50 пассажиров выходит из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт B прибывает менее 336 пассажиров, если из пункта A их выезжает 462?

5. В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа участников кросса, не уложившихся в норматив, заключен от 94,2 % до 94,4 %. Каково наименьшее число участников кросса?

6. Автобус на пути из A в B делает 5 остановок по 10 мин через каждые 16 км (расстояние от A до B равно 96 км), скорость автобуса равна 65 км/ч. Одновременно с автобусом из B навстречу ему выезжает велосипедист со скоростью 21 км/ч. На каком расстоянии от A автобус встретится с велосипедистом?

7. Пассажирский поезд проходит мимо столба за 6 секунд. За какое время пройдут друг мимо друга скорый и пассажирский поезда, если скорость скорого поезда в $3/2$ раза больше скорости пассажирского, а длина пассажирского в $4/3$ раза больше длины скорого?

8. Работа началась между 9 и 10 часами утра, а закончилась между 15 и 16 часами того же дня. Определите продолжительность работы, если в момент начала и в момент окончания работы минутная и часовая стрелки были перпендикулярны.

9. Один рабочий может изготовить партию деталей за 12 часов. Работу начал один рабочий, через 1 час к нему присоединился второй, еще через час – третий и т. д., пока работа не была выполнена. Сколько времени проработал первый рабочий? (Производительность труда всех рабочих одинакова.)

10. Имеются три слитка массой 2, 3 и 5 кг с различным содержанием меди. Каждый слиток разделен на три части, и из девяти получившихся кусков получены три слитка массой 2, 3 и 5 кг с равным содержанием меди. На какие части следует разделить исходные слитки, чтобы гарантировать равное процентное содержание меди в получившихся слитках независимо от содержания ее в исходных слитках?

11. Три школьника делят между собой орехи. Сначала первый школьник дал каждому из двух других по одной четверти имевшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем второй дал каждому из двух других по одной четверти оказавшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем то же сделал третий школьник. В результате у каждого оказалось по 30 орехов. Сколько орехов было у каждого школьника первоначально?

НЕСКОЛЬКО ЭПИЗОДОВ ИЗ ЖИЗНИ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Вписанные и описанные окружности обладают целым рядом похожих свойств. Такие свойства и будут нас интересовать в первую очередь. Суть сходства хорошо иллюстрируют следующие две задачи.

Задача 1. В треугольнике ABC известны стороны $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Найдите отрезки сторон, на которые они делятся точками касания с вписанной окружностью.

Задача 2. В треугольнике ABC известны углы A , B и C . Найдите углы, образованные радиусами описанной окружности, идущими в вершины треугольника, со сторонами, сходящимися в этих вершинах.

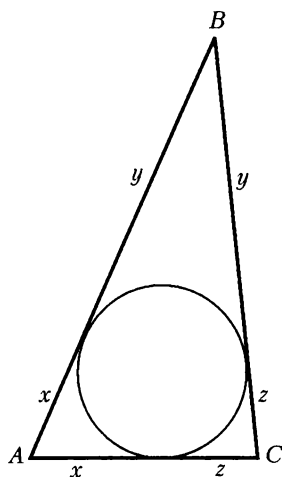


Рис. 1

Решим 1-ю задачу. Отрезки двух сторон, имеющие общую точку – вершину треугольника, попарно равны (рис.1); обозначая их соответ-

ственно через x , y и z , получаем систему уравнений $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, из которой найдем $x = \frac{1}{2}(b + c - a) = p - a$, $y = \frac{1}{2}(a + c - b) = p - b$, $z = \frac{1}{2}(a + b - c) = p - c$, где p – полупериметр треугольника.

Полученные формулы следует отнести к категории «рабочих»: во многих конкурсных и олимпиадных задачах они оказываются полезными, и потому их стоит запомнить.

Аналогичным образом можно решить и 2-ю задачу (рис.2). Углы, прилежащие к одной стороне треугольника, попарно

равны, обозначая их через x, y, z , приходим к системе $x + y = C$, $y + z = A$, $z + x = B$, из которой

$$x = \frac{1}{2}(B + C - A) = \frac{\pi}{2} - A,$$

$$y = \frac{1}{2}(A + C - B) = \frac{\pi}{2} - B,$$

$$z = \frac{1}{2}(A + B - C) = \frac{\pi}{2} - C.$$

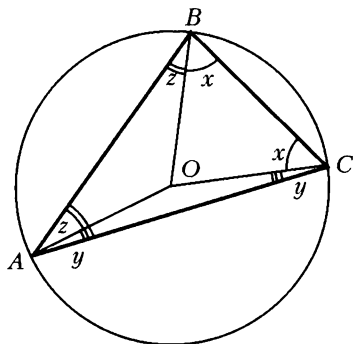


Рис.2

Правда, в отличие от предыдущего случая, возможны отрицательные значения углов (углы следует считать ориентированными). Такими будут углы, прилежащие к большей стороне тупоугольного треугольника. Соотношения задачи 2 могут быть без труда получены из свойства центральных и вписанных углов ($\angle BOC = 2\angle BAC$). Читатель же не только внимательный, но и вдумчивый, возможно, обратит внимание на полную эквивалентность формул задач 1 и 2

(особенно, если во второй серии вместо $\frac{\pi}{2}$ взять d – полусумму углов данного треугольника) и задумается о глубине аналогий между вписанной и описанной окружностью. В обоих случаях мы пользовались, по существу, лишь свойством равнобедренного треугольника, справедливым не только в нашей Евклидовой геометрии. Полученные соотношения верны и для сферических треугольников, для которых двойственность сторон и углов является важнейшим теоретическим фактом. Эта двойственность влечет и двойственность между вписанными и описанными окружностями, в частности для сферического треугольника существуют «внеописанные» окружности, соответствующие внеописанным окружностям. Мы не будем дальше развивать эту тему. Перейдем к рассмотрению вписанных и описанных четырехугольников. Их главные свойства мы сформулируем в виде следующих задач.

Задача 3. Пусть $ABCD$ – описанный четырехугольник. Тогда $AB + CD = BC + AD$.

Задача 4. Если $ABCD$ – вписанный четырехугольник, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$. ($\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$).

При этом указанные соотношения являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы данный четырехугольник являлся описанным (вписанным).

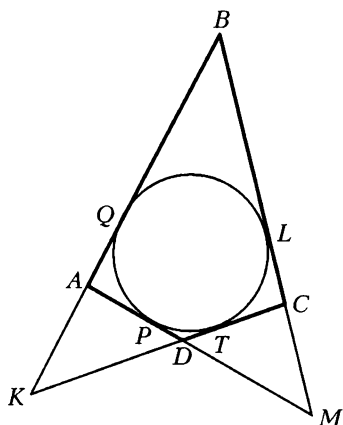


Рис.3

Отметим еще два соотношения, дающие каждое необходимое и достаточное условие существования окружности, вписанной в данный четырехугольник, не являющийся трапецией.

Задача 3'. Пусть противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ пересекаются при продолжении так, как показано на рисунке 3. Тогда если $ABCD$ — описанный четырехугольник, то $KA + AM = KC + CM$, $KD + BM = MD + KB$. И обратно, если выполняется одно из этих соотношений, то

четыреугольник $ABCD$ является описанным.

Можно указать соответствующие два соотношения и для вписанного четырехугольника (какие?). Но мы этого делать не будем, так как для рассматриваемого нами плоского случая они малоинтересны.

Доказательство. Докажем сначала необходимость соотношения из задачи 3. Используя то, что соответствующие касательные попарно равны, будем иметь $KA + AM = KQ - AQ + AP + PM = KT + ML = KC - CT + CL + MC = KC + MC$.

Обычно достаточность условий теорем из задач 3, 3' и 4 доказывают методом от противного. Мы же предложим несколько иной путь, еще больше подчеркивающий родство вписанной и описанной окружностей.

Докажем достаточность условия задачи 3. Отложим на KC отрезок $KE = KA$, а на MB возьмем $MF = MA$ (рис.4). Из

равенства $KA + AM = KC + CM$ следует, что $CF = MF - MC = MA - MC = KC - KA = EC$.

Таким образом, поскольку KA и KE , MA и MF , CE и CF соответственно попарно равны, биссектрисы углов AKD , AMB и BCD являются серединными перпендикулярами к AE , AF и FE . Значит, эти биссектрисы пересекают-

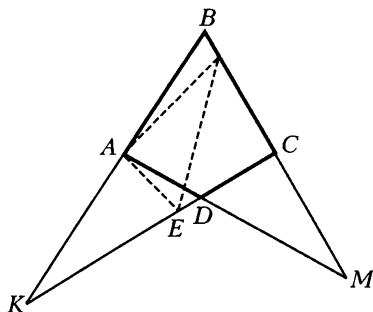


Рис.4

ся в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника AEF . Эта точка равноудалена от KB и KC , KC и BC , BC и AM . Следовательно, эта точка равноудалена от сторон четырехугольника $ABCD$ и является центром вписанной в него окружности.

Для доказательства достаточности условия задачи 4 предположим, что в четырехугольнике $ABCD$ суммы противоположных углов равны и для определенности $D < C$, $A < B$.

Проведем через точки C и B соответственно прямые, образующие со сторонами DC и AB углы, равные углам D и C (рис.5). Получились два равнобедренных треугольника CMD

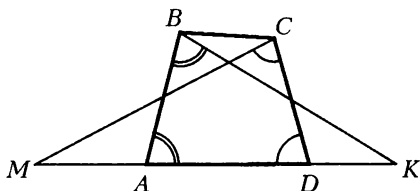


Рис.5

($CM = MD$) и ABK ($AK = BK$). Треугольник BEC также является равнобедренным ($\angle CBE = \angle ABC - \angle BAD = \angle BCD - \angle CDA = \angle BCE$). Серединные перпендикуляры к сторонам AB , BC и CD являются биссектрисами внутренних углов треугольника MEK , а значит, пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена ото всех вершин четырехугольника и является для него центром описанной окружности, а для треугольника MEK она – центр вписанной окружности.

Как видим, в этих двух доказательствах вписанная и описанная окружности любезно раскланялись друг с другом.

В случае, когда $ABCD$ – трапеция, имеются специальные признаки.

Задача 5. Для того чтобы в трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC можно было вписать окружность, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих равенств:

а) $TB + BP = DP$, $TC + AP = AD + CP$, где P – точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, T – проекция D на прямую BC ;

$$б) \frac{AD}{BC} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

Докажите эти утверждения самостоятельно.

И в заключение решим две задачи.

Задача 6. Пусть $ABCD$ – описанный четырехугольник. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и CDA , касаются друг друга.

Доказательство. Пусть окружности, вписанные в треугольники ABC и CDA , касаются AC в точках K и M соответственно

(рис.6). Нам надо доказать, что точки K и M совпадают. По формулам задачи 1 имеем

$$MK = |AM - AK| = \left| \frac{1}{2}(AB + AC - BC) - \frac{1}{2}(AC + AD - CD) \right| = \\ = \frac{1}{2}|AB + CD - BC - AD| = 0.$$

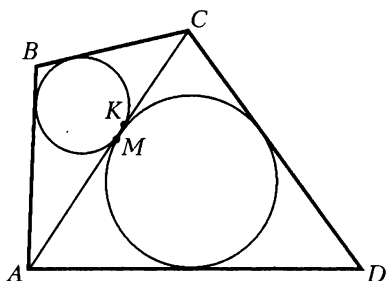


Рис. 6

Задача 7. Через вершину A четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная DC , пересекающая прямую BC в точке B_1 , а через вершину C проведена прямая, параллельная AB и пересекающая прямую AD в точке D_1 . Докажите, что
а) если $ABCD$ – вписанный четырехугольник, то и AB_1CD_1 – также вписанный четырехугольник;

б) если $ABCD$ – описанный четырехугольник, то и AB_1CD_1 – также описанный четырехугольник.

Доказательство. Докажем пункт б), поскольку пункт а) доказывается совсем просто (по существу, пункт а) включен в условие из чисто эстетических соображений). Ограничимся также случаем, когда $ABCD$ не является трапецией. Обозначим через K и M точки пересечения прямых AD и BC , AB и CD соответственно. Возможны два случая (рис.7 и 8). Пусть P –

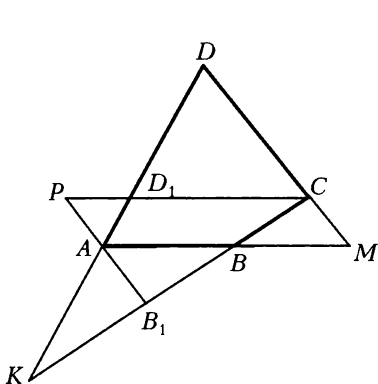


Рис. 7

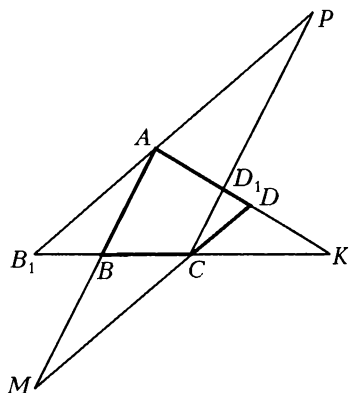


Рис. 8

точка пересечения прямых AB_1 и CD_1 . В случае, соответствующем рисунку 7, имеем $PA = CM$, $PC = AM$. Поскольку $ABCD$ – описанный четырехугольник, то (см. первое равенство задачи 3) $KA + AM = KC + CM$. Заменяя AM и CM на PC и PA , будем иметь $KA + PC = KC + PA$ и в соответствии с задачей 3', четырехугольник AB_1CD_1 является описанным. В случае, соответствующем рисунку 8, наоборот, исходя из утверждения задачи 3 для четырехугольника $ABCD$, получим, что для четырехугольника AB_1CD_1 выполняется утверждение задачи 3'. В заключение предлагаем вам несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. ABC – равнобедренный треугольник, на основании AC которого взята точка M . Найдите расстояние между точками касания окружностей, вписанных в треугольники ABM и CBM , со стороной BM , если $AM = a$, $MC = b$.

2. Последовательные стороны описанного пятиугольника равны a , b , c , d , e . Найдите отрезки, на которые разделена точкой касания сторона a .

3. Докажите, что у описанного многоугольника с четным числом сторон суммы длин сторон, взятых через одну, равны.

4. Параллелограмм $ABCD$ прямыми, пересекающими стороны AB и CD , разделен на несколько трапеций, в каждую из которых можно вписать окружность. Докажите, что произведение отрезков, на которые оказалась разделена сторона AB , равно произведению отрезков, образовавшихся на стороне CD .

5. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 так, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M внутри треугольника. Рассмотрим три четырехугольника AB_1MC_1 , BC_1MA_1 и CA_1MB_1 . Докажите, что если два из этих четырехугольников являются описанными, то и третий также является описанным.

6. Докажите, что если боковые ребра четырехугольной пирамиды равны, то сумма двух двугранных углов при противоположных боковых ребрах пирамиды равна сумме двух других двугранных углов.

7. В пространстве даны два луча OA и OB . Найдите геометрическое место лучей OC , если величина $\alpha + \beta - \gamma$ является постоянной, где α , β и γ соответственно двугранные углы при ребрах OA , OB и OC получившегося трехгранного угла.

ЧЕРТЕЖИ В ЗАДАЧАХ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

При решении стереометрических задач существенно возрастает роль чертежа. Чертеж не только выступает как полноправный элемент решения, но и весьма часто включается в метод решения, дает ключ к решению задачи. О некоторых видах таких задач будет рассказано в этой статье. Прежде всего заметим, что пространственные тела можно разделить на две группы: «хорошие», удобные для изображения, и «плохие». К первой группе относятся треугольные призмы (в первую очередь правильные), параллелепипеды, треугольные и четырехугольные пирамиды. Ко второй – n -угольные ($n > 4$) призмы и пирамиды, усеченные пирамиды и круглые тела, особенно сфера.

Один из весьма распространенных приемов состоит в том, что в заданной «неудобной» конструкции вычленяется в качестве

ключевого элемента «хороший» многогранник. Такой пример дает

Задача 1. Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α .

Решение. Здесь удобно рассмотреть треугольную пирамиду – своего рода $1/6$ часть от данной, – вершинами которой являются концы высоты и одной стороны основания исходной пирамиды (рис.1). В этой пирамиде $OB = OA$, $\angle BOA = 60^\circ$, SO перпендикулярна плоскости AOB , $\angle ASB = \alpha$. Двугранный угол между плоскостями ASB и OBS (или OAS) равен половине искомого угла (искомый угол φ). Опустим из A перпендикуляры AD и AK на BS и OB . Тогда $\angle KDA = \varphi/2$ (докажите). Положив

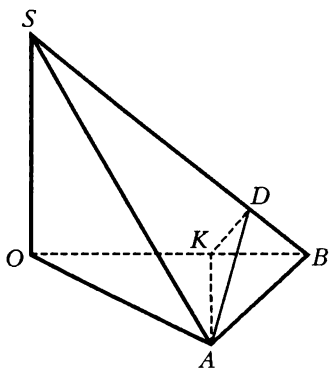


Рис.1

перпендикулярна плоскости AOB , $\angle ASB = \alpha$. Двугранный угол между плоскостями ASB и OBS (или OAS) равен половине искомого угла (искомый угол φ). Опустим из A перпендикуляры AD и AK на BS и OB . Тогда $\angle KDA = \varphi/2$ (докажите). Положив

$OA = OB = R$, будем иметь

$$AK = R \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad AB = R, \quad AD = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AK}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi = 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

Эта очень простая задача носит чисто иллюстративный характер.

Практически в каждой сколько-нибудь содержательной задаче по стереометрии возникают те или иные проблемы, связанные с чертежом. Можно выделить некоторые типичные приемы, используемые в соответствующих ситуациях. Так, например, в задачах, в которых фигурируют прямые и плоскости в пространстве, надо постараться «привязать» заданную конфигурацию к «хорошему» многограннику. Прямые и плоскости не должны «болтаться» в пространстве! Они должны быть связаны с каким-то многогранником, опираться на него, являться его элементами. Рассмотрим два примера на эту тему.

Задача 2. В пространстве даны три попарно перпендикулярные прямые, расстояния между которыми равны 1. Найдите площадь параллелограмма, две вершины которого расположены на одной прямой, а две оставшиеся – на двух других прямых.

Решение. В качестве опорного многогранника рассмотрим единичный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис.2). Прямые AB , CC_1 и $D_1 A_1$ попарно перпендикулярны и находятся на расстоянии 1 друг от друга. Параллелограмм $ABC_1 D_1$ (а точнее, прямоугольник) удовлетворяет условию задачи. Его площадь равна $\sqrt{2}$. Любой другой параллелограмм, удовлетворяющий условию, имеет такую же площадь. Докажите это самостоятельно.

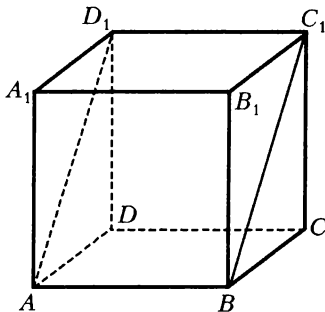


Рис.2

Не так просто найти нужную интерпретацию в следующей задаче.

Задача 3. На плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?

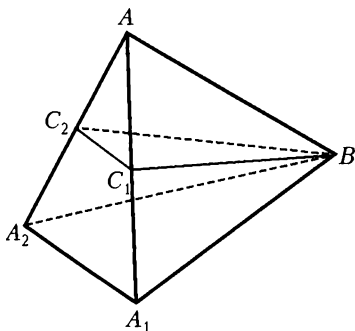


Рис.3

Поскольку отраженные лучи представляют собой продолжения отрезков A_1B и A_2B , искомый угол равен углу A_1BA_2 . Прямые AC_1 и AC_2 перпендикулярны соответственно данному зеркалу и повернутому. Значит, $\angle C_1AC_2 = \angle A_1AA_2 = \beta$. По условию $\angle ABC_1 = \alpha$. Если $AB = A_1B = A_2B = a$, то $AC_1 = a \sin \alpha$, $CC_1 = AC_1 \cdot \sin \beta = a \sin \alpha \sin \beta$. ($\angle AC_2C_1 = 90^\circ$, так как C_1C_2 принадлежит повернутому зеркалу, а C_2 – проекция A на него.) Значит, $A_1A_2 = 2C_1C_2 = 2a \sin \alpha \sin \beta$. Теперь в равнобедренном треугольнике A_1BA_2 мы знаем все стороны и легко найдем угол A_1BA_2 . Он равен $2 \arcsin(\sin \alpha \sin \beta)$.

Во многих задачах по стереометрии пространственный чертёж носит чисто иллюстративный характер (в некоторых случаях можно и вовсе обойтись без него), а вся работа ведется на плоском чертеже, представляющем собой либо какое-то сечение пространственной конструкции, либо специальным образом выбранную

проекцию. В этой связи, раз уж мы повели разговор о прямых в пространстве, проиллюстрируем заодно и один специфический прием определения расстояния между скрещивающимися прямыми, основанный на ортогональном проектировании.

Задача 4. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра равны 1. Точки K и M – соответственно, середины AB и DC . Найдите расстояние между прямыми $СК$ и $ВМ$.

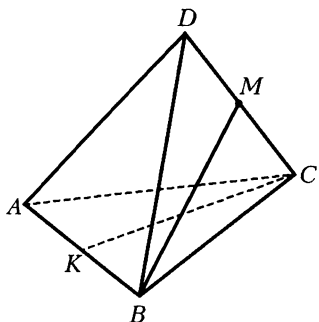


Рис.4

Решение. Рисунок 4 иллюстрирует задачу. Проведем через AB плоскость, перпендикулярную $СК$, и спроектируем нашу пирамиду на эту плоскость (рис.5). При этом прямая $СК$ спроектируется в точку K' – середину отрезка $A'B' = AB = 1$. Высота $D'K'$ треугольника $A'B'D'$ равна высоте нашей пирамиды, т.е. $D'K' = \sqrt{2/3}$. M' – середина $D'K'$, является про-

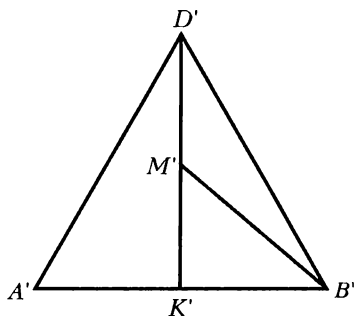


Рис.5

екцией точки M . Расстояние между прямыми $СК$ и $ВМ$ равно расстоянию от точки K' до прямой $B'M'$ (почему?). Имеем простейшую планиметрическую задачу: найти высоту, опущенную на гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\frac{1}{2}$. Искомое расстояние равно $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Особая тема – чертежи в задачах про круглые тела. Здесь нередко можно (и нужно) обойтись вовсе без изображения самих тел, ограничившись изображением некоей скелетной конструкции, образованной их центрами, осями, точками, касательными и т.д. И если одинокие цилиндры или конусы иногда все же полезно изобразить, то по отношению к сфере сделанная рекомендация практически не имеет исключений.

Например, вполне типичная ситуация – четыре равные, попарно касающиеся сферы, – иллюстрируется треугольной пирамидой, все ребра которой равны диаметрам этих сфер. Вершины этой пирамиды суть центры данных сфер.

Иногда приходится и вовсе обходиться одними плоскими (не проекционными) чертежами, удерживая пространственную конфигурацию в голове, поскольку ее изображение далеко выходит за рамки графических возможностей нормального человека. Например:

Задача 5. Четыре равных шара касаются плоскости, а каждый шар касается двух соседних. Рассмотрим конус, основание которого расположено в плоскости, касающейся данных шаров, высота равна диаметру этих шаров, а боковая поверхность касается каждого шара. Найдите отношение объемов конуса и шара.

Решение. Если R – радиус каждого шара, то центры шаров образуют квадрат со стороной $2R$. Для решения задачи вполне

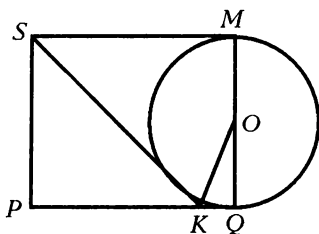


Рис.6

достаточно рисунка 6, на котором SP – ось конуса, MQ – диаметр одного из шаров (Q – точка касания шара с плоскостью), SK – образующая конуса, касающаяся шара. Более того, мы могли бы не изображать и окружность, по которой плоскость SPO пересекает шар. Понятно, что $SM = R\sqrt{2}$ как

половина диагонали квадрата со стороной $2R$. Если $\angle MSO = \varphi$, то $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит,

$$\angle PSK = 90^\circ - 2\varphi$$

и

$$PK = 2R \operatorname{tg}(90^\circ - 2\varphi) = R \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = R \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Теперь нетрудно найти искомое отношение, оно равно $\frac{1}{4}$.

В следующей задаче основная проблема (как и в задаче 4) – найти нужную графическую интерпретацию.

Задача 6. Два шара радиусами 1 и 3 касаются друг друга внешним образом. Через точку M , расположенную на расстоянии 3 от центра меньшего шара, проведены две прямые, касающиеся обоих шаров. Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них образует угол 45° с прямой, проходящей через центры шаров.

Решение. Обозначим центры шаров соответственно через O_1 и O_2 , а через A и B – точки касания с ними той касательной, которая образует угол 45° с прямой O_1O_2 . А теперь достроим эту конструкцию до треугольной призмы O_1ACDBO_2 (рис.7). Поскольку ребро AB перпендикулярно ребрам AO_1 и BO_2 , то эта призма прямая. В прямоугольнике O_1CO_2D диагональ O_1O_2 образует угол в 45° с ребром O_1D , следовательно, этот прямоугольник является квадратом. Его диагональ $O_1O_2 = 4$, значит, сторона этого квадрата равна $2\sqrt{2}$. Основания нашей призмы – прямоугольные

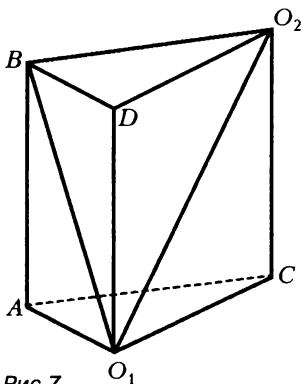


Рис.7

треугольники с прямыми углами при вершинах O_1 и D ($O_1C^2 = 9 - 1 = AC^2 - AO_1^2$). Точка M , по условию, расположена на расстоянии 3 от O_1 на прямой AB . Но $O_1B = 3$. Таким образом, возникают два случая: 1) M совпадает с B ; 2) M симметрична B относительно точки A .

Далее заметим, что вторая касательная симметрична AB относительно плоскости MO_1O_2 . Следовательно, угол между касательными равен удвоенному углу между одной из них и плоскостью MO_1O_2 (или дополняет этот угол до 180°).

Рассмотрим первый случай: M совпадает с B . Нам надо найти угол между прямой BA и плоскостью BO_1O_2 . Этот угол равен углу между DO_1 и плоскостью BO_1O_2 . Рассмотрим треугольную пирамиду BDO_1O_2 . Ее объем равен $\frac{1}{6} BD \cdot DO_2 \cdot DO_1 = \frac{4}{3}$. Возьмем теперь за основание треугольник BO_1O_2 : $BO_2 = 3$, $BO_1 = 3$, $O_1O_2 = 4$. Площадь BO_1O_2 равна $2\sqrt{5}$. Если h — высота, опущенная из D на BO_1O_2 , то $\frac{2}{3}\sqrt{5}h = \frac{4}{3}$. Из этого уравнения найдем $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Таким образом, синус угла между DO_1 и плоскостью BO_1O_2 равен $\frac{1}{\sqrt{10}}$. Значит, $\frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$ (или $\arctg \frac{1}{3}$), где α — искомый угол.

Второй случай рассмотрите самостоятельно. Впрочем, можно сообразить, что во втором случае ответ такой же, как и в первом. Это следует из того, что AO_1 — общий перпендикуляр между AB и O_1O_2 , а точки M , соответствующие каждому случаю, симметричны относительно A .

Хочу подчеркнуть, что построение чертежа — это не единичная акция, предшествующая решению задачи, а процесс, включенный в решение, и нередко сопровождающий все решение от начала до конца. В него могут входить изображение общей ситуации, отдельных ее фрагментов, специальных сечений и проекций. Иногда полезно выстраивать последовательность чертежей, изменяющихся одновременно с развитием сюжета задачи, а также с появлением новых знаний об изучаемой конфигурации в процессе решения, создавая своеобразный чертеж-мультфильм. (К сожалению, во многих учебных пособиях решения задач сопровождаются итоговым чертежом, а вся динамика его развития остается «за кадром».) Частично подтверждением этого может служить следующая задача.

Задача 7. Найдите объем общей части трех правильных четырехугольных призм, вписанных в единичный куб так, что вершинами каждой призмы служат середины ребер этого куба.

Решение. Попробуем разобраться в ситуации постепенно, последовательно вписывая в куб три призмы. Рассмотрим куб

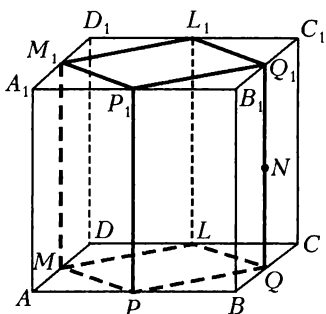


Рис.8

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (первый кадр нашего мультфильма, который мы из экономии места не изображаем). Впишем в него призму $PQLMP_1Q_1L_1M_1$ (рис.8). Теперь рассмотрим призму с основаниями на гранях ABB_1A_1 и DCC_1D_1 . Понятно, что боковая грань этой призмы, проходящая через P, L и середины BB_1 и CC_1 , отсечет от первой призмы «уголок» при вершине Q , представляющий собой треугольную пирамиду $PQLN$, где

N – середина QQ_1 . Точно так же отрезаются уголки при вершинах Q_1, M и M_1 . В результате получаем многогранник PLL_1P_1KN (рис.9). Теперь надо добавить третью призму с

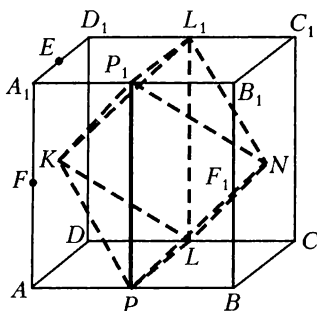


Рис.9

основаниями на гранях BCC_1B_1 и ADD_1A_1 и отсечь от полученного многогранника все, выходящее за границы третьей призмы. Поскольку попытка изобразить эту общую часть трех призм на одном чертеже приводит к чрезмерной перегрузке чертежа и потере наглядности, попробуем проделать эту операцию умозрительно. Общая часть двух призм есть объединение двух правильных четырехугольных пирамид с общим основанием PLL_1P_1 .

Этот же многогранник (октаэдр) можно рассматривать и как объединение двух (не правильных) четырехугольных пирамид с основанием PNL_1K . Грань третьей призмы, проходящей через точки F, E, F_1, E_1 – середины ребер куба $AA_1, A_1D_1, BB_1, B_1C_1$ – пересечет боковые ребра P_1P, P_1K, P_1L_1, P_1N пирамиды PKL_1NP_1 в их серединах, а следовательно, эта грань отсечет $1/8$ объема этой пирамиды или $1/16$ объема октаэдра PKL_1NP_1L . То же самое можно утверждать относительно каждой из трех других боковых граней третьей призмы. Значит, третьей при-

змой отсекается $1/4$ объема октаэдра PLL_1P_1KN , а общая часть всех трех призм имеет объем, равный $3/4$ его объема, т. е. объем части равен $3/4 \cdot 1/3 = 1/4$.

Упражнения

1. Дан двугранный угол величиной α . В плоскости одной грани проведена прямая, перпендикулярная ребру этого двугранного угла, а в плоскости другой грани проведена прямая, образующая угол β с ребром. Чему равен угол между этими прямыми?

2. Плоский угол α повернут на угол β вокруг своей биссектрисы. На какой угол повернулись стороны угла?

3. В пространстве расположены три прямые и плоскость такие, что все попарные углы между ними (между парами прямых, а также между каждой прямой и плоскостью) равны между собой. Найдите эти углы.

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра равны 1. Точки K и M соответственно середины ребер AB и BC . Найдите угол и расстояние между прямыми CK и DM .

5. Внутри конуса находятся четыре шара равных радиусов. Три шара касаются его основания, каждый шар касается боковой поверхности конуса, кроме того, каждый шар касается трех других. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

6. Две противоположные вершины куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на боковой поверхности цилиндра. Найдите отношение объемов цилиндра и куба.

7. На прямой l расположены центры трех шаров радиусами 1, 2 и 5, причем шар радиусом 2 касается двух других внешним образом. Прямая p касается всех трех шаров. Найдите угол и расстояние между прямыми l и p .

8. Найдите объем общей части шести правильных четырехугольных пирамид, основание каждой из которых совпадает с гранью данного единичного куба, а противоположная вершина принадлежит противоположной грани куба.

ОТКУДА БЕРУТСЯ ЗАДАЧИ?

Я хочу поделиться своим довольно большим опытом в деле составления различных геометрических задач, раскрыть некоторые секреты своей кухни, сформулировать эстетические и даже этические принципы. Начну с того, что задачи удобно разделить на три группы: учебные, конкурсные и олимпиадные. Можно говорить еще и о творческих задачах, но это скорее подтекст, нежели формальный признак, характеристика «творческая» более относится не к самой задаче, а к процессу ее решения. Впрочем, стоит все же выделить в отдельную группу задачи «проблемного» типа.

Существует определенный набор характерных технических приемов, достаточно часто используемых при составлении тех или иных видов задач.

Перефразировка

Начну с примера.

Задача 1. *Докажите, что для произвольного треугольника проекция диаметра описанной около него окружности, перпендикулярного одной стороне этого треугольника, на другую его сторону равна третьей стороне.*

Решение. За этой изящной словесностью скрывается широкоизвестный факт, сопутствующий теореме синусов: $a = 2R \sin A$ (здесь и далее a, b, c – стороны треугольника, A, B, C – его углы, R – радиус описанной окружности). Формулировка этой задачи литературно настолько привлекательна, что перед ее чарами не устояли даже издававшие виды руководители «Задачника «Кванта», включившие ее в свой задачник. Задача эта скорее учебная, чем олимпиадная. Ее смысл – показать известный факт с новой неожиданной точки зрения.

Весьма распространенным является прием, который можно назвать «замена опорной фигуры». Я, как ведущий раздела «Задачи» в журнале «Математика в школе», нередко прибе-

гаю к нему, если мне не хватает для этого раздела какой-либо не очень трудной задачи (подобные задачи обычно даются без авторской подписи). Такие задачи встречаются довольно часто. Вот пример из XXIV Всесоюзной олимпиады по математике (1990 г.).

Широко и давно известна следующая теорема:

Теорема. Если на прямых AB , BC и CA взяты произвольно точки C' , A' и B' соответственно, отличные от вершин треугольника ABC , то окружности, проходящие через A , B' , C' ; A' , B , C' и A' , B' , C имеют общую точку.

(Иногда эту теорему называют теоремой Микеля, а общую точку пересечения окружностей обозначают через M и называют точкой Микеля.)

Доказывается эта теорема в общем-то несложно. Единственная трудность, если не прибегать к ориентированным углам, состоит в необходимости перебора различных случаев взаимного расположения точек C' , A' и B' . В ситуации, изображенной на рисунке 1,а, обозначив через M точку пересечения окружностей A , B' , C' и A' , B , C' , легко покажем, что точки A' , B' , C , M лежат на одной окружности.

А вот задача Всесоюзной олимпиады:

Задача 2. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка E , отличная от точек A и B . Отрезки AC и DE пересекаются в точке F . Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC , CDF и BDE , имеют общую точку.

Решение. Присмотревшись к рисунку 1,б и вдумавшись в условие, мы без труда заметим, что задача 2 совпадает с теоремой, если указанную в ней конфигурацию привязать к треугольнику AEF (переобозначив при этом буквы $E \rightarrow B$, $B \rightarrow C'$, $F \rightarrow C$, $C \rightarrow B'$, $D \rightarrow A'$). Конечно, формулировка задачи 2 менее естествен-

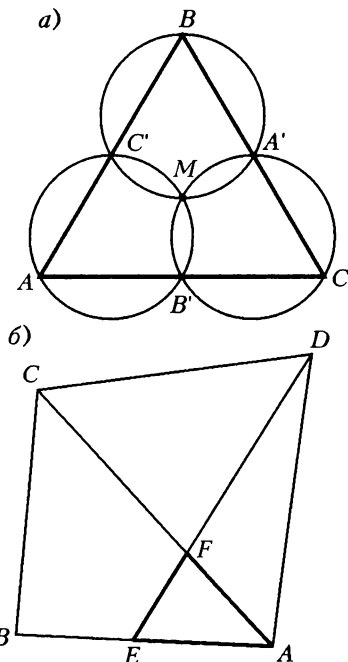


Рис. 1

на, а следовательно, менее эстетична, чем теоремы. Возможно, что я и ошибся в своих предположениях и неверно «вычислил» происхождение этой задачи 2. Ну, что ж, тем хуже для организаторов олимпиады.

Очень красивые и эффектные задачи могут возникать при переводе геометрической задачи с геометрического языка на алгебраический. Например, возьмем известную задачу на построение треугольника по трем высотам (можете ли вы решить эту задачу?). Идея состоит в том, что треугольник со сторонами a , b , c подобен треугольнику со сторонами $1/h_a$, $1/h_b$, $1/h_c$ по третьему признаку подобия треугольников.

Пусть теперь высоты треугольника равны a , b , c , а его стороны x , y , z . Если этот треугольник остроугольный, легко получаем систему уравнений для x , y , z .

Итак, имеем задачу (рис.2):

Задача 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = z, \\ \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = x, \\ \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = y. \end{cases}$$

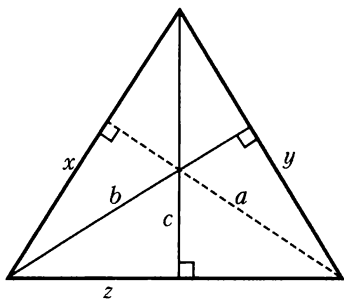


Рис.2

Зная происхождение этой системы, мы без труда найдем условие, при котором она совместна (остроугольность треугольника со сторонами $1/a$, $1/b$, $1/c$), а затем и решим саму систему. (Докажите при этом, что система, как и задача на построение, не может иметь более одного решения.)

К этому же разделу, хотя и с некоторой натяжкой, можно отнести изменение формулировки, связанное с переходом от прямого утверждения к обратному. (Стоит заметить, что границы между типами задач весьма размыты, условны. Одна и та же задача часто может служить иллюстрацией различных приемов, тем более, что во многих случаях итоговая задача получается за счет комбинации различных приемов.) Здесь возможен широкий спектр различных случаев и разновидностей, поэтому я ограничусь одним примером, показывающим, как из тривиального по сути прямого утверждения получается вполне богатая геометри-

ческим содержанием задача. Совершенно очевидно, что точка пересечения высот (точка H) остроугольного треугольника ABC обладает следующим свойством:

$$\angle HAB = \angle HCB, \quad \angle HBA = \angle HCA, \quad \angle HAC = \angle HBC.$$

В связи с этим возникает вполне естественно задача:

Задача 4. Найдите геометрическое место таких точек M , для которых имеют место равенства $\angle MAB = \angle MCB$, $\angle MBA = \angle MCA$, где ABC – данный остроугольный треугольник.

Решение. Понятно, что искомому месту точек внутри треугольника принадлежит его точка пересечения высот. Кстати, здесь возникает отнюдь не тривиальная задача: единственна ли такая точка внутри треугольника? Мы докажем ее единственность. Для этого продолжим AM , BM и CM до пересечения со сторонами треугольника в точках A_1 , B_1 и C_1 (рис.3). Точки A , C , A_1 и C_1 лежат на одной окружности. Значит, $\angle MA_1C_1 = \angle MCA = \angle MBC_1$ и $\angle MAC = \angle MC_1A_1$. Таким образом, M , B , A_1 и C_1 также лежат на одной окружности и $\angle MBA_1 = \angle MC_1A_1 = \angle MAC$. Обозначив

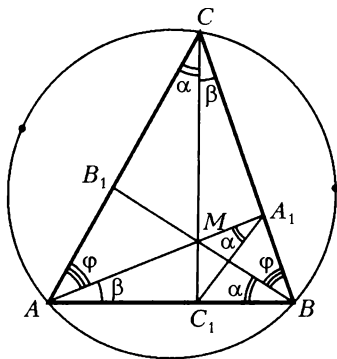


Рис.3

теперь углы через α , β и φ , как на рисунке 3, найдем, что $\alpha + \beta + \varphi = \pi/2$, из чего следует, что AA_1 , BB_1 и CC_1 – высоты нашего треугольника. Однако наше геометрическое место не исчерпывается одной точкой пересечения высот. В него входит также дуга AB описанной около ABC окружности, а также середины дуг BC и CA (докажите это).

Конструкции

Чаще всего в задачах этого типа «сооружается» некая геометрическая конструкция, в качестве деталей которой берутся некие фигуры и их элементы.

Иллюстрацией здесь могут служить стереометрические задачи-«монстры», встречающиеся на экзаменах в такие вузы, как МФТИ, мехмат и ВМК МГУ и некоторые другие. Я не буду приводить примеры подобных задач, тем более, что за ними не надо далеко ходить. Достаточно вспомнить стереометрические

задачи из вариантов 1990 г., опубликованные в журнале «Квант», № 1 и 2 за 1990 и 1991 годы.

Усложнение геометрической конструкции почти наверняка приводит к многоходовости задачи, превращает ее в своего рода задачу-«этажерку» (много полочек и на каждой своя задачка) или задачу-«матрешку» (несколько задач, одна в другой).

Впрочем, такого рода задачи не обязательно должны иметь в основе сложную геометрическую конструкцию. Вот простой пример, составленный из двух (или из трех) задач-«полочек»:

Задача 5. *Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух других треугольников.*

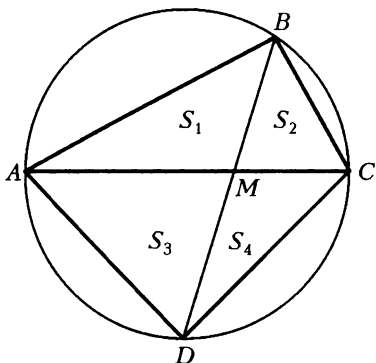


Рис.4

Задача 6. *Докажите, что из всех четырехугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.*

Решите задачи 5 и 6 самостоятельно, а мы из них сконструируем следующую задачу.

Задача 7. *В единичную окружность вписан четырехугольник ABCD, диагонали которого пересекаются в точке M. Найдите площадь этого четырехугольника, если известно, что произведение площадей треугольников ABM и CDM равно $1/4$.*

Решение. Чтобы ее решить, достаточно заметить (рис.4), что $S_1 S_3 = S_2 S_4 = 1/4$ (задача 5), а также, что $S = S_1 + S_3 + S_2 + S_4 \geq 2\sqrt{S_1 S_3} + 2\sqrt{S_2 S_4} = 2$ (неравенство о среднем арифметическом).

Кроме того (задача 6), $S_{ABCD} \leq 2$, так как площадь квадрата, вписанного в единичную окружность, равна 2. Из всего этого следует, что ABCD – квадрат и его площадь 2.

Иногда целью конструкции является маскировка основной идеи, или, говоря шахматным языком, добавление вступительной игры. Обычно это приводит к появлению в условии лишних деталей, мало и даже вовсе не работающих в решении, что, конечно же, снижает эстетический уровень задачи («Каждое

ружье должно стрелять!»). В качестве примера, возможно не очень убедительного, поскольку мой анализ основывается на личных домыслах, вновь возьму задачу с XXIV Всесоюзной олимпиады.

Задача 8. На сторонах A_1A_2 и A_2A_3 правильного $2n$ -угольника A_1, A_2, \dots, A_{2n} взяты точки K и N соответственно так, что $\angle KA_{n+2}N = \pi/(2n)$. Докажите, что NA_{n+2} – биссектриса угла KNA_3 .

Решение. Вся суть задачи в следующем. Возьмем произвольный треугольник ABC и проведем в нем биссектрису угла B и биссектрисы углов, смежных с углами A и C (рис.5). Эти три прямые, как известно, пересекаются в одной точке – центре вневписанной окружности треугольника ABC . (Если вы этого не знаете, докажите самостоятельно. Рассуждение полностью аналогично доказательству того, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.) Обозначим эту точку через P . Нетрудно доказать, что угол APC равен $90^\circ - \frac{1}{2}B$. Верно и обратное утверждение: если на биссектрисе угла B вне треугольника ABC взята точка P такая, что $\angle APC = 90^\circ - \frac{1}{2}B$, то AP и CP

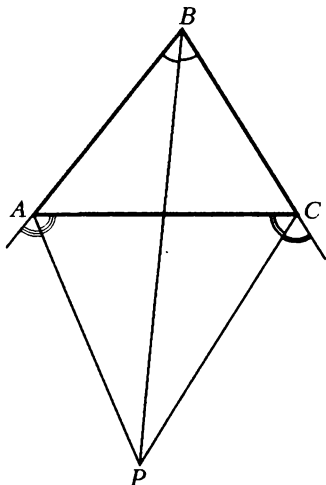


Рис.5

будут являться биссектрисами внешних углов этого треугольника. (Докажите.) Вот и все. Именно в этом суть ситуации, описанной в условии задачи 8. (Роль треугольника ABC играет треугольник KA_2N , вместо точки P – вершина A_{n+2} .) Весь антураж в виде правильного n -угольника нужен лишь для того, «чтобы вы не догадались».

Многие задачи конструируются авторами под понравившуюся им идею решения. Правда, довольно часто «решатели» находят другие, отличные от авторского, иногда более простые решения.

В связи с задачей 8 хочу в качестве примера взять одну из «своих» задач. Мне захотелось сконструировать задачу, в которой рассуждение о том, что три биссектрисы пересекаются в

одной точке, а вернее, что через точку пересечения двух биссектрис углов некоего треугольника (не обязательно внутренних, см. рисунок 5) проходит третья, повторялось бы дважды, причем второй этап существенно опирался бы на первый. Получившуюся задачу нельзя назвать очень удачной, поскольку идея была реализована на известной конструкции, но все же...

Задача 9. В треугольнике ABC угол B равен 120° . На стороне AC взята точка M , а на прямой AB точка K так, что BM – биссектриса угла ABC , а CK – биссектриса угла, смежного с ACB . Отрезок MK пересекает сторону BC в точке P . Докажите, что $\angle APM = 30^\circ$.

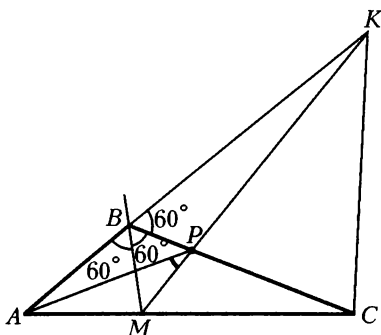


Рис. 6

Решение. Вот это двухходовое рассуждение. Для треугольника BMC отрезки BK и CK – биссектрисы внешних углов B и C (рис. 6). Следовательно, MP – биссектриса угла BMC , а P – точка пересечения биссектрис

углов, внешних к углам B и M треугольника ABM . Значит, AP – биссектриса угла BAC . Окончательно получаем

$$\angle APM = \angle PMC - \angle PMA = \frac{1}{2}(\angle MBC - \angle BMA) = 30^\circ.$$

Ну, и наконец, задачу можно конструировать «под ответ» (так часто поступают в учебных задачах) или, более широко, «под результат». Хочу в качестве примера привести одну задачку-ловушку (весьма редко встречающийся тип задач), в которой специально подобранные числовые данные задают непривычную геометрическую ситуацию. Несмотря на определенные недостатки (пришлось прибегнуть к маленькой хитрости в формулировке условия), задача эта мне весьма дорога. Правда, ее нельзя отнести ни к олимпиадным – не принято давать на олимпиадах задачи с числовыми данными, ни к конкурсным задачам – попасться в ловушку могут даже самые сильные, а это не соответствует идее конкурса. Скорее, это все же учебная задача с воспитательным оттенком.

Задача 10. В основании четырехугольной пирамиды лежит выпуклый четырехугольник, две стороны которого равны 6, а две оставшиеся 10, высота пирамиды равна 7, боковые грани

наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.

Решение. По условию, двугранные углы при основании равны или 60° или 120° (но не обязательно только 60° . Именно в этом небольшая тонкость в формулировке!), а вершина пирамиды проектируется в точку, равноудаленную от сторон, а вернее, от прямых, образующих четырехугольник. Из последнего следует, что четырехугольник в основании не может быть параллелограммом. Две соседние его стороны равны 6, две другие, также соседние, равны 10. Но если у четырехугольника $ABCD$ имеет место $AB = BC (= 10)$, $AD = DC (= 6)$, то для него есть две точки O_1 и O_2 , равноудаленные от его сторон (рис.7). Из условия следует, что расстояния от проекции вершины пирамиды до ее сторон равны $7/\sqrt{3}$. Если вершина проектируется в точку O_1 — центр вписанной в $ABCD$ окружности, то площадь $ABCD$ должна быть равной $16 \cdot \frac{7}{\sqrt{13}}$. Но площадь $ABCD$ не превосходит 60 (она равна 60, если углы A и C прямые), а $16 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} > 60$. Значит, вершина проектируется в точку O_2 , расстояния от которой до сторон четырехугольника $ABCD$ равны $\frac{7}{\sqrt{3}}$. Теперь легко найдем площадь $ABCD$,

$(10 - 6) \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{28}{\sqrt{3}}$, а затем и объем пирамиды $\frac{64}{\sqrt{3}}$.

Частный случай

Многие общие теоремы, вооружающие нас мощным средством решения задач, такие как теорема Чевы в геометрии или неравенства о средних в алгебре, могут выступать и в качестве инструмента составления задач. Например, возьмем теорему

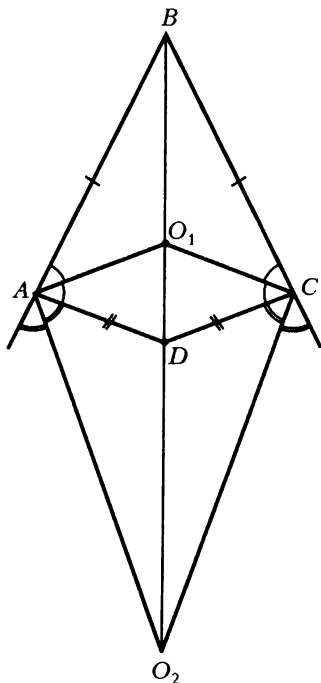


Рис.7

Паскаля: если A, B, C, D, E и F – шесть точек, расположенных на окружности, то три точки, в которых пересекаются попарно прямые AB и DE , BC и EF , FA и CD , расположены на одной прямой. Рассмотрим также задачу:

Задача 11. Пусть стороны AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а стороны BC и AD – в точке K . Докажите, что касательные к окружности в точках B и D пересекаются на прямой KM .

Не надо обладать большой наблюдательностью, чтобы заметить, что эта задача является частным, а вернее предельным случаем теоремы Паскаля.

Профессиональные математики, занимающиеся также и организацией математических олимпиад, нередко черпают красивые и интересные задачи из своей научной деятельности, перенося на школьную почву частные случаи серьезных математических теорем, приспособливая к ней те или иные леммы, в большом числе возникающие при доказательстве почти любой серьезной математической теоремы. Правда, в геометрии такие примеры не слишком часты, серьезная математика все же очень далека от школьной геометрии. (Эту фразу ни в коем случае нельзя рассматривать как упрек геометрии.) Поэтому я ограничусь одним примером, возможно, не очень ярким и характерным.

Есть такая теорема «о зигзаге». Даны две окружности (возможно, в пространстве). Известно, что существует набор из $2n$ точек A_1, A_2, \dots, A_{2n} таких, что точки с нечетными номерами расположены на одной окружности, точки с четными номерами – на другой и $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{2n}A_1$. Тогда таких наборов из 2-х точек существует бесконечно много, причем в качестве точки A можно взять любую точку первой окружности, а расстояние между последовательными точками будет таким же, как у исходного набора точек.

Я не знаю элементарного доказательства этой теоремы. Однако ее частные случаи вполне можно использовать в качестве элементарных задач. Например:

Задача 12. На плоскости даны две окружности с радиусами R и r и расстоянием между центрами a . Найдите сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся – на другой.

Задача эта достаточно проста, поэтому я ограничусь лишь указанием ответа: $\sqrt{R^2 + r^2 - a^2}$.

Варьирование условий

Простейший пример, достаточно точно иллюстрирующий этот прием, дает такая серия задач: построить треугольник по а) трем сторонам; б) трем медианам; в) трем высотам; г) трем биссектрисам. На этом примере видно, сколь сильно может меняться уровень сложности при подобном варьировании условия. В нашей четверке за совершенно элементарной первой задачей следует вполне содержательная, не очень, правда, сложная задача. Третья задача уже существенно сложнее, а четвертая – и вовсе не решается при помощи циркуля и линейки.

Любопытную идею, с помощью которой можно создавать серии задач, предложил киевский учитель математики В. Куценок. Возьмем какое-нибудь геометрическое соотношение, допустим, равенство $ah_a = bh_b$, и зададимся вопросом: каковы свойства треугольника, для которого выполняется соотношение, получающееся из рассматриваемого заменой высот на медианы или биссектрисы? В результате можно получить такую задачу:

Задача 13. На плоскости даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек плоскости C таких, что для треугольника ABC имеет место равенство:

а) $am_a = bm_b$ (m_a и m_b – медианы треугольника ABC);

б) $a\beta_a = b\beta_b$, (β_a, β_b – биссектрисы треугольника ABC).

Решение в обоих пунктах весьма сходно. Рассмотрим пункт а).

Пусть AA_1 и BB_1 – высоты треугольника, AA_0 и BB_0 – медианы. Из условия следует подобие треугольников AA_0A_1 и BB_0B_1 . Возможны два случая расположения точек A_1, A_0, B_1, B_0 на сторонах треугольника ABC , изображенные на рисунках 8,а и 8,б. В первом случае точки A, B, A_0 и B_0 расположены на одной окружности. Из этого ввиду параллельности A_0B_0 и AB

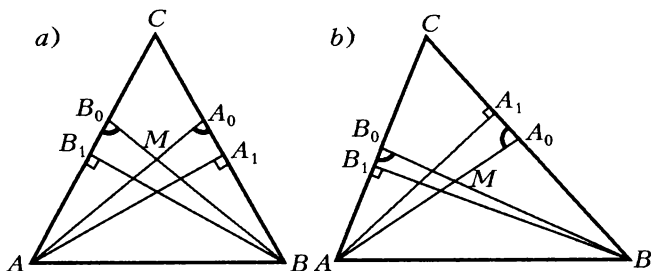


Рис. 8

следует равнобокость трапеции AB_0A_0B , а значит, равенство $AC = BC$. Во втором случае на одной окружности оказываются точки C, M, A_0 и B_0 . Во вписанном четырехугольнике CA_0MB_0 диагональ A_0B_0 есть половина AB и делится диагональю CM пополам. Диагональ CM есть $\frac{2}{3}m_c$ и делится диагональю A_0B_0 в отношении 3:1. Из равенства произведений отрезков диагоналей найдем $m_c^2 = 3AB^2$. Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из срединного перпендикуляра к отрезку AB и окружности с центром в середине AB и радиусом $AB\sqrt{3}$.

В пункте б) точка расположена также или на срединном перпендикуляре к AB , или на дуге окружности, из точек которой AB виден под углом 60° .

Вообще, при варьировании условий задачи могут возникать любопытные серии. Приведу пример двух таких серий (не стремясь к их полноте).

Известна классическая теорема, утверждающая, что из равенства двух внутренних биссектрис треугольника следует его равнобедренность (теорема Штейнера–Лемуса). Само по себе утверждение этой теоремы вполне естественно и ожидаемо, если бы не трудности, с которыми приходится сталкиваться при ее доказательстве, в отличие от родственных тривиальных теорем, касающихся медиан или высот. Уже здесь виден скверный нрав биссектрис. Но в полной мере он проявляется в следующей задаче.

Задача 14. Будет ли равнобедренным треугольник ABC , если у него:

- а) равны биссектрисы внешних углов A и B ?
- б) равны отрезки KA_1 и $, где AA_1 и BB_1 – биссектрисы внутренних углов треугольника, а K – их точка пересечения?$
- в) равны расстояния от точки C_1 (CC_1 – биссектриса угла C) до середин сторон CA и CB ?
- г) имеет место равенство $C_1A_1 = C_1B_1$?
- д) окружность, проходящая через точки A_1 , B_1 и C_1 , касается стороны AB данного треугольника?

Во всех пяти пунктах ответ отрицательный. Наиболее нетривиально это получается в пунктах г) и д).

Ограничусь рассмотрением последнего пункта, о котором я узнал лишь недавно из фольклорных источников. При этом я покажу только, как можно построить пример неравнобедренного треугольника, удовлетворяющего условию, не объясняя, как до этого можно додуматься.

Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 – биссектрисы треугольника ABC (рис.9). Возьмем на продолжениях сторон AC и BC точки A_2 и B_2 так, что $CA_2 = CA_1$, $CB_2 = CB_1$. Понятно, что точки A_1 , A_2 , B_1 и B_2 расположены на одной окружности. Если при этом окажется, что AC_1 и BC_1 равны касательным, проведенным из A и B к этой окружности, то она касается AB в точке C_1 . (Если длина отрезка равна сумме касательных, проведенных из его концов к окружности, то этот отрезок касается окружности. Докажите это самостоятельно.) Следовательно, должны выполняться равенства:

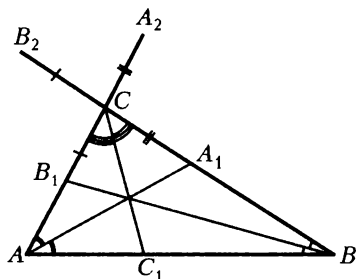


Рис.9

$$AC_1^2 = AB_1 \cdot AA_2, \quad BC_1^2 = BA_1 \cdot BB_2.$$

Выражая отрезки сторон треугольника ABC через стороны ($AB_1 = \frac{bc}{c+a}$ и т.д.), убедимся, что каждое из этих двух равенств эквивалентно соотношению

$$(a+b+c)(a+b)^2 = c(c+a)(c+b).$$

Остается убедиться, что существует неравнобедренный треугольник, стороны которого удовлетворяют этому соотношению. Нетрудно найти конкретный числовой пример. Пусть $c = 1$, $a + b = 1 + \lambda$. Тогда $ab = \lambda(2 + \lambda)^2$. Если λ достаточно мало, можно найти a и b , при этом $a \neq b$.

Еще одна интересная серия задач связана с условием равногранности тетраэдра. Напомним, что тетраэдр (произвольная треугольная пирамида) называется равногранным, если все его грани – равные между собой треугольники. Известен целый ряд условий, необходимых и достаточных для того, чтобы тетраэдр был равногранным. Не стремясь к полноте, а тем более к рекорду, сформулирую следующую многопунктовую задачу.

Задача 15. Какие из следующих условий являются необходимыми и достаточными для того, чтобы тетраэдр $ABCD$ был равногранным:

- Противоположные ребра попарно равны.
- Периметры всех граней равны между собой.
- Суммы плоских углов при трех вершинах равны 180° .
- Выполняются равенства

$$\angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle ADC.$$

д) Выполняются равенства

$$\angle BAC = \angle BDC, \angle ABD = \angle ACD, \angle BAD = \angle BCD.$$

е) Все грани имеют равные радиусы описанной окружности.

ж) Все грани имеют равные радиусы вписанной окружности.

з) Все грани имеют равные площади.

и) Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, попарно перпендикулярны.

к) Центр описанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра.

л) Центр вписанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра.

м) Центры вписанной и описанной сфер совпадают.

н) Сумма косинусов двугранных углов равна -2 .

о) На описанной около тетраэдра сфере расположены центры четырех шаров, каждый из которых касается одной грани во внутренней точке и плоскостей трех других граней.

Уф!... Пожалуй, достаточно. В принципе, подобных условий можно выписать несколько десятков, особенно если учесть, что некоторые из них можно смешивать. Так, например, первые 8 условий записываются в виде трех равенств, и мы имеем возможность выписывать новые условия, беря, скажем, одно равенство из пункта а) (равны два противоположных угла) и два равенства из пункта в) (суммы плоских углов при двух вершинах равны 180°),

В данной задаче почти все условия являются необходимыми и достаточными, чтобы тетраэдр был равногранным. Вы уже, наверное, догадались, что исключением скорее всего является пункт ж) – опять биссектрисы безобразничают. Так оно и есть. Попробуйте сами построить пример тетраэдра с неравными гранями, но с равными радиусами вписанных в них окружностей. В качестве граней можно взять две пары неравных равнобедренных треугольников, имеющих нужное свойство.

Весьма нетривиально доказывается пункт о). Во всяком случае, достаточно элементарного доказательства я не знаю.

Кстати, пункт д) возник уже в процессе работы над статьей. Здесь интересно, что существенной является «пространственность» тетраэдра. Если A, B, C и D в одной плоскости, этого недостаточно для равенства треугольников.

Обобщение

Все развитие математики представляет собой путь постоянных обобщений. Конечно, при использовании этого приема для

получения новых элементарных задач мы, как правило, на многое не претендуем, но тем не менее помнить и понимать его значение необходимо.

Обобщение может идти по различным направлениям. Иногда оказывается возможным в рассматриваемой задаче снять некоторые ограничения и распространить соответствующее утверждение на более широкое множество объектов. Так, однажды в старом математическом журнале я встретил следующую задачу:

Задача 16. *Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ сторона AD является диаметром окружности, а биссектрисы углов B и C пересекаются на AD . Докажите, что имеет место равенство $AB + CD = AD$.*

Решение этой задачи, приведенное в журнале, мне не понравилось. После некоторого размышления удалось найти другое решение, в котором никак не использовалось то, что AD — диаметр окружности. Это условие оказалось лишним. В результате возникла вполне новая

Задача 16'. *Докажите, что если биссектрисы углов B и C вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD , то $AD = AB + CD$.*

Суть упомянутого мною решения (есть много других) состоит в следующем. Возьмем точку P на AD , в которой пересекаются биссектрисы углов B и C . Опишем около BSP окружность и обозначим через M вторую точку пересечения этой окружности с AD . Тогда, учитывая равенства соответствующих углов вписанных четырехугольников $ABCD$ и $BCPM$, докажем равнобедренность треугольников ABM ($AB = AM$) и CDM ($CD = DM$). Прodelайте эти рассуждения самостоятельно.

Из этого примера также видно, сколь полезно при решении задачи не ограничиваться одним методом, рассматривать различные пути решения, уделяя особое внимание более геометричным, поскольку они глубже вскрывают внутренние свойства фигур, позволяют отделить главное от второстепенного. В связи с этим еще один, более свежий пример. На Всероссийской олимпиаде в 1990 году (см. «Квант» №11 за 1990 г.) была предложена

Задача 17. *Точки D и E лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC . Точки K и M делят отрезок DE на три равные части. Прямые BK и EM пересекают сторону AC в точках T и P . Докажите, что*

$$TP \leq \frac{1}{3} AC.$$

Уже сама формулировка вызвала у меня легкое чувство протеста. Слишком громоздко, много буквенных обозначений,

без которых вполне можно было обойтись. Также не удовлетворило меня и решение этой задачи, приведенное в журнале. Оно в некоторой мере противоречило выработанным мною принципам, выглядело неестественным (для меня). Найдя устраивающее меня решение, я сумел также и несколько переформулировать эту задачу, сделать ее более общей.

Задача 17'. Из вершины угла выходят два луча, расположенные внутри угла. Некоторая прямая пересекает стороны угла

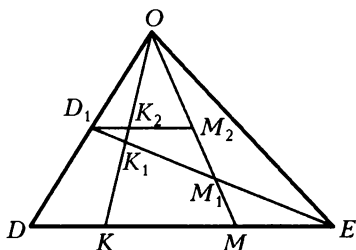


Рис. 10

в точках D и E , а лучи в точках K и M . Докажите, что отношение $\frac{KM}{DE}$ будет наибольшим, если $DK = ME$.

Для доказательства рассмотрим какую-то другую прямую, причем можно считать, что она проходит через E и пересекает другую сторону и лучи в точках D_1 , K_1 и M_1 (рис.10). Положим $DK = ME = a$, $KM = b$, $OD_1 = \lambda OD$. Проведя через D_1 прямую параллельно DE , будем иметь:

$$D_1K_2 = \lambda a, \quad K_2M_2 = \lambda b, \quad \frac{D_1M_1}{M_1E} = \frac{\lambda(a+b)}{a},$$

$$D_1M_1 = \frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a} \cdot D_1E, \quad D_1K_1 = \frac{\lambda a}{\lambda a + b + a} \cdot D_1E,$$

$$K_1M_1 = \left(\frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a} - \frac{\lambda a}{\lambda a + b + a} \right) D_1E.$$

Окончательно задача сводится к доказательству несложного алгебраического неравенства

$$\frac{\lambda(b^2 + 2ab)}{(\lambda(a+b)+a)(\lambda a + a + b)} \leq \frac{b}{2a+b},$$

которое преобразуется к виду

$$(\lambda - 1)^2 a(a+b) \geq 0.$$

Другим возможным направлением обобщения является перенос некоего геометрического факта с одних объектов на другие, в частности, выход из плоскости в пространство. Так возникла

Задача 18. К двум сферам проведены две касательные AB и CD , A и C — на поверхности одной сферы, B и D — на другой.

Докажите, что проекции AC и BD на прямую, проходящую через центры сфер, равны.

В плоском варианте эта задача вполне проста. (В этом случае AB и CD – общая внешняя и общая внутренняя касательные двух окружностей.) Да и в пространстве она не слишком сложна. (Все следует из того, что середины общих касательных к двум сферам лежат в одной плоскости, перпендикулярной линии центров. Докажите это утверждение.) Здесь, на мой взгляд, интереснее то обстоятельство, что пространственный аналог планиметрического утверждения остается верным. Такое случается не слишком часто. Нередко смысл пространственного обобщения в построении опровергающего примера. Так, простейшее в планиметрии утверждение: основание хотя бы одной высоты треугольника лежит на соответствующей стороне, а не на ее продолжении, – в пространственном исполнении трансформируется в вопрос:

Задача 19. *Верно ли, что для любого тетраэдра основание хотя бы одной высоты принадлежит соответствующей грани этого тетраэдра?*

Ответ на этот вопрос отрицательный. Контрпримером является тетраэдр, у которого два двугранных угла, соответствующие двум скрещивающимся ребрам, являются тупыми.

Нередко одна и та же задача может обобщаться в различных направлениях, порождать целые обобщающие серии. Возьмем широкоизвестную теорему:

сумма расстояний от произвольной точки внутри правильного треугольника до его сторон постоянна. (Для тех, кто не знаком с этой задачей, обозначим доказательство. Площадь рассматриваемого правильного треугольника равна сумме площадей трех треугольников, основания которых – стороны правильного треугольника, и общая вершина – какая-то точка внутри этого треугольника. И т.д.)

Утверждение этой теоремы очевидно обобщается на произвольный выпуклый равносторонний многоугольник. Менее очевидно, что она обобщается и на равноугольный многоугольник. В самом деле, пусть $A_1A_2 \dots A_n$ – равноугольный многоугольник (рис. 11, $n = 5$). Рассмотрим

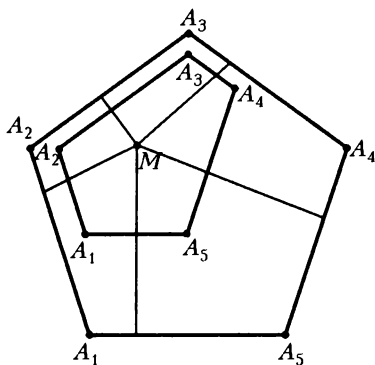


Рис. 11

правильный n -угольник $A'_1A'_2 \dots A'_n$ со сторонами, параллельными сторонам исходного n -угольника, и содержащий его. Для любой точки M внутри $A_1A_2 \dots A_n$ сумма расстояний до сторон $A'_1A'_2 \dots A'_n$ постоянна. Но расстояние до какой-то стороны исходного n -угольника меньше, чем расстояние до параллельной ей стороны второго правильного n -угольника на постоянную величину. Значит, и вся сумма расстояний от M до сторон $A_1A_2 \dots A_n$ отличается от сумм расстояний от M до сторон $A'_1A'_2 \dots A'_n$ на постоянную величину, т.е. и сама является постоянной.

Можно сделать и еще один шаг обобщения, объединяющий два предыдущих (равносторонность и равноугольность). В итоге можно сформулировать следующую теорему:

Задача 20. *На плоскости даны n различных единичных векторов, сумма которых равна нулю. Рассмотрим выпуклый n -угольник, стороны которого перпендикулярны соответствующим векторам. Тогда для всех внутренних точек этого n -угольника сумма расстояний до его сторон одна и та же.*

Возможны и другие пути обобщения исходной теоремы про правильный треугольник. Например, выйти в пространство. Кстати, возникает вопрос, верна ли в пространстве теорема-задача 20, вернее, ее аналог?

Открытия и проблемы

Предыдущие примеры иллюстрировали те или иные технические приемы. И все же главный источник новых задач — это любознательность, стремление всякий раз докопаться до существа дела, умение увидеть привычное с неожиданной точки зрения. Вот тогда-то и появляются самые интересные геометрические задачи, задачи-открытия. К этой категории задач, на мой взгляд, относится одна из наиболее симпатичных олимпиадных задач последних лет.

Задача 21. *Можно ли из деревянного единичного куба выпилить три правильных тетраэдра с единичным ребром?*

Задача эта предлагалась на Всероссийской олимпиаде в 1989 году. Здесь интересно то, что во многих олимпиадных сборниках обсуждалась задача о выпиливании из единичного куба двух тетраэдров. А оказывается, можно выпилить целых три! (Возьмем три попарно скрещивающиеся ребра куба. Каждое из них будет ребром одного тетраэдра. Середины противоположных ребер каждого тетраэдра совпадают с центром куба. Докажите теперь, что эти тетраэдры более не имеют общих точек.)

Конечно, вовсе не обязательно красивый факт, обнаруженный лично вами, окажется открытием и для всего человечества.

Это не так уж и страшно, тем более что многие старые геометрические теоремы являются откровением для признанных геометрических экспертов. Многое, слишком многое, из тысячелетней геометрической культуры утеряно.

Одним из своих любимых геометрических открытий я считаю следующую задачу:

Задача 22. *Какое наибольшее число прямых можно провести через какую-то точку в пространстве так, чтобы все попарные углы между ними были бы равны?*

Ответ: 6. При этом я прекрасно понимаю, что наверняка этот факт был известен в глубокой древности, например, Архимеду.

То, что таких прямых не может быть более шести, несложно доказать. В самом деле, пусть l_1 и l_2 – две прямые нашего семейства, проходящие через точку O . Тогда все оставшиеся прямые должны принадлежать пересечению двух конических поверхностей: осью одной из них является прямая l_1 , а прямая l_2 является одной из образующих; для второй – наоборот, l_2 – ось, l_1 – образующая. Такие две конические поверхности пересекаются не более чем по четырем прямым.

Примером шестерки прямых, обладающих нужным свойством, могут служить диагонали икосаэдра – правильного двадцатигранника (двенадцативершинника). Если вы плохо представляете себе икосаэдр, то можете построить нужный пример следующим образом. Возьмем шесть векторов: $(a, \pm b, 0)$; $(\pm b, 0, a)$; $(0, a, \pm b)$ в качестве направляющих векторов наших прямых. Поскольку все векторы имеют одну и ту же длину, то должны быть равными абсолютные величины всех попарных скалярных произведений. Считая, что $a \geq b > 0$, приходим к равенству $a^2 - ab - b^2 = 0$. Можно взять $b = 1$, $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

В геометрии, как наверное ни в одном предмете, короток путь от учебной задачи к нерешенной проблеме. В конце концов, не так уж сильно разнятся по постановке вопросы: «найти наименьшее значение площади треугольника, содержащего единичную окружность» и «найти фигуру наименьшей площади, которой можно покрыть любую плоскую фигуру диаметра 1». Но если первая – простая школьная задача, то вторая – до сих пор не решенная проблема Лебега о минимальной «покрышке». Но для того, чтобы сформулировать подобную содержательную проблему, надо обладать хорошей математической культурой и вкусом. Не следует забывать пословицу, утверждающую, что один дурак может задать столько вопросов, что и сотня мудрецов не ответит.

В отличие от других математических дисциплин в геометрии возможен эксперимент в прямом, физическом смысле этого слова. Многие геометрические открытия древности явились следствием наблюдений и эксперимента. Очень возможно, что известный современный геометр Коннели, построивший деформирующийся многогранник (многогранник, который может деформироваться так, что каждая из его граней остается неизменной), в процессе своей работы много экспериментировал – склеивал или как-то иначе создавал пространственные модели. Многогранник Коннели разрешил одну из старейших математических проблем, а то обстоятельство, что решение этой проблемы оказалось вполне элементарным, и полностью было опубликовано в журнале «Квант» (в 9 номере за 1978 год), учитывая уровень развития современной математики, кажется фантастическим. Такое возможно только в геометрии, и то крайне редко.

Здесь я хочу привести пример другого «маленького» открытия, сделанного экспериментальным путем. В элементарной геометрии есть следующая проблема: какое наибольшее число единичных квадратов можно вырезать из квадрата со стороной $4 + \alpha$, где $0 < \alpha < 1$? Этой проблемой занимались многие крупные геометры, в частности, известный венгерский геометр Эрдеш. Она послужила поводом дать в журнале «Математика в школе» ради эксперимента, хотя и в ином смысле, следующую задачу.

Известно, что из квадрата со стороной $4 + \alpha$ можно вырезать 17 единичных квадратов. Указать как можно меньшее α , при котором это можно сделать.

Возможно, эта задача выглядит не очень красиво, но все же некоторый смысл в ней есть. Понятно, что никто не рассчитывал на то, что читатели найдут наименьшее такое α . Большинство читателей прислали расположение, изображенное на рисунке

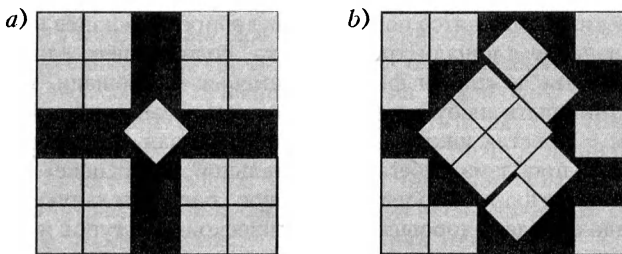


Рис. 12

12,а, для которого $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Неожиданностью оказалось письмо от участников математической секции «Горизонт» при школе 51 города Киева (руководитель Б.Н.Школьник). В письме было сказано, что, проделав соответствующий эксперимент (!), члены секции пришли к заключению, что наименьшее α достигается для расположения, указанного на рисунке 12,б. (Проверьте самостоятельно, что для такого расположения α на несколько сотых меньше, чем для рисунка 12,а). Не зная описания эксперимента, трудно судить о справедливости этого утверждения. Кроме того, математическое воспитание не позволяет с полным удовлетворением воспринять подобное «доказательство». (А собственно, почему?) Очень возможно, что указанное расположение и в самом деле является оптимальным для нашего частного случая. Но самое главное, эта задача показывает, что геометрические открытия доступны буквально любому школьнику, а не только начинающим математическим гениям. Дерзайте! Да сопутствует вам успех!

ОТВЕТЫ

Достраивание тетраэдра

1. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом и воспользуйтесь для каждой грани параллелепипеда теоремой, связывающей сумму квадратов длин сторон параллелограмма и сумму квадратов длин его диагоналей.

2. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом; для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы соответствующая грань получившегося параллелепипеда была ромбом.

$$3. \text{ а) } \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)} \sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)};$$

$$\text{ б) } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}. \text{ Указание. См. задачи 3, 4 в статье.}$$

4. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом. Учтенный квадрат длины каждого ребра параллелепипеда выразите по теореме косинусов через длину диагоналей соответствующей грани и угол между ними (по одной грани на ребро). Затем к граням параллелепипеда примените теорему о сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма и сумме квадратов длин его сторон. Сложив все полученные равенства, получите требуемый результат.

Вокруг биссектрисы

(20) Пусть H – точка пересечения высот, тогда MN проходит через середину BH – точку K , $BK = B_1O$ (B_1 – середина AC). Далее, докажете, что прямая MN параллельна OB (если $\angle C > \angle A$, то $\angle MKN = 2\angle MBH = \angle C - \angle A = \angle OBH$).

(21) Докажите, что площадь треугольника с вершинами в точках касания вневписанной окружности с центром I_a можно вычислить по формуле

$$Q_a = S_{ABC} \cdot \frac{r_a}{2R} = \frac{S_{ABC}^2}{2R} \cdot \frac{1}{p - a}.$$

Аналогичные формулы могут быть получены для площадей других треугольников.

(22) Пусть K_1 и L_1 – такие точки на BC и BA , что $K_1K \parallel L_1L \parallel BB'$. Достаточно доказать, что треугольники BK_1K и BL_1L подобны, т.е. что

$BK_1 : K_1K = BL_1 : L_1L$. Имеем

$$\frac{BK_1}{BA'} = \frac{B'K}{B'A'}, \quad \frac{K_1K}{BB'} = \frac{A'K}{B'A'},$$

и по теореме (1)

$$\frac{BK_1}{K_1K} = \frac{B'K}{A'K} \cdot \frac{BA'}{BB'} = \frac{CB'}{CA'} \cdot \frac{BA'}{BB'} = \frac{c}{b} \cdot \frac{CB'}{BB'} = \frac{ca}{(a+c)BB'}.$$

Последнее выражение симметрично относительно a и c , а значит, равно также и $BL_1 : L_1L$.

(23) Докажем, что оба утверждения эквивалентны равенству $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Возьмем на дуге BAD точку A_1 так, что $DA_1 = AB$. Условие задачи эквивалентно тому, что прямая A_1C проходит через N – середину BD , т.е. равенству площадей треугольников DA_1C и A_1BC , откуда $DA_1 \cdot DC = BA_1 \cdot BC$ или $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

(24) Пусть B_1 – середина AC . Продолжим биссектрису до пересечения в точке B_2 с перпендикуляром, восстановленным к AC в точке B_1 . Точка B_2 лежит на описанной около ABC окружности. Проведем через M перпендикуляр к AC , пусть L – точка его пересечения с AC , K – с BB_1 , тогда $KM = ML$. Проведем через K прямую, параллельную AC , пересекающую AB и BC в точках D и E . Если G и F – проекции D и E на AC , то M – центр прямоугольника $GDEF$, причем $\triangle DME \sim \triangle AB_2C$ ($\triangle DME$ получается из $\triangle AB_2C$ при гомотетии с центром в B). Имеем

$$\operatorname{ctg} \angle MCL = \frac{LC}{ML} = \frac{LF}{ML} + \frac{FC}{ML} = \frac{AB_1}{B_1B_2} + 2 \frac{FC}{EF} = \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} + 2 \operatorname{ctg} \angle C.$$

Если теперь B' – основание биссектрисы, P и T – проекции N и B' на BC , то

$$\operatorname{ctg} \angle NCB = \frac{PC}{NP} = \frac{PT}{NP} + \frac{TC}{NP} = \frac{BP}{NP} + 2 \frac{TC}{B'T} = \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} + 2 \operatorname{ctg} \angle C,$$

т.е. $\angle MCA = \angle NCB$.

(25) Произведение длин отрезков от вершины A треугольника до точек пересечения стороны AB с данной окружностью будет равно такому же произведению для стороны AC . Эти длины легко выразить через длины рассматриваемых хорд и длины сторон треугольника. Аналогичные равенства можно записать для вершин B и C . Таким образом мы получим систему уравнений, позволяющую выразить длины хорд через длины сторон и проверить утверждение задачи прямым вычислением. Чтобы избежать перебора вариантов, удобно выбрать какое-то направление обхода треугольника и считать отрезки направленными, а их длины – произвольными действительными числами.

(26) Пусть $\angle KAL = \angle KLA = \varphi$, $\angle KCL = \angle LKC = \psi$. Тогда $\angle BKL = 2\varphi$, $\angle BLK = 2\psi$, $2\varphi + 2\psi = 180^\circ - B$. Если Q – точка пересечения AL и KC , то $\angle AQC = 180^\circ - (\varphi + \psi) = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$. Проведем через

M прямую, параллельную BC , до пересечения с KC в точке N , тогда MQ – биссектриса угла AMN и $\angle AQN = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$. Отсюда следует, что Q – точка пересечения биссектрис треугольника AMN , значит, $\triangle AMN \sim \triangle KBL$. Пусть $AK = KL = LC = x$, $AM = y$, $MN = z$. Из того, что $\triangle AMN \sim \triangle KBL$ и $\triangle KMN \sim \triangle KBC$, получим

$$\frac{z}{a-x} = \frac{y}{c-x}, \quad \frac{y-x}{c-x} = \frac{z}{a},$$

откуда $y = a$.

(27) Перпендикулярность биссектрис доказывается без труда. Докажем второе утверждение. Пусть M – середина AC , N – середина BD . Из подобия треугольников AMK и BKD следует, что $\angle MKA = \angle NKD$ и $\frac{MK}{KN} = \frac{AC}{BD}$, т.е. биссектриса угла BKC является также биссектрисой угла MKN и делит отрезок MN в отношении $\frac{MK}{KN} = \frac{AC}{BD}$. Очевидно, что в этом же отношении делит MN и биссектриса угла ALB .

Приложение к журналу «Квант» №5/2004

И.Ф.Шарыгин

ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ

Редактор *А.Ю.Котова*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ИБ № 72

Подписано к печати 31.05.04. Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр.

Гарнитура кудряшевская. Печать офсетная. Объем 4 печ.л.

Тираж 5000 экз. Заказ № 1741

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А,
«Квант»

Отпечатано на ГУ РПП,
г. Ржев, ул. Урицкого, 91

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10